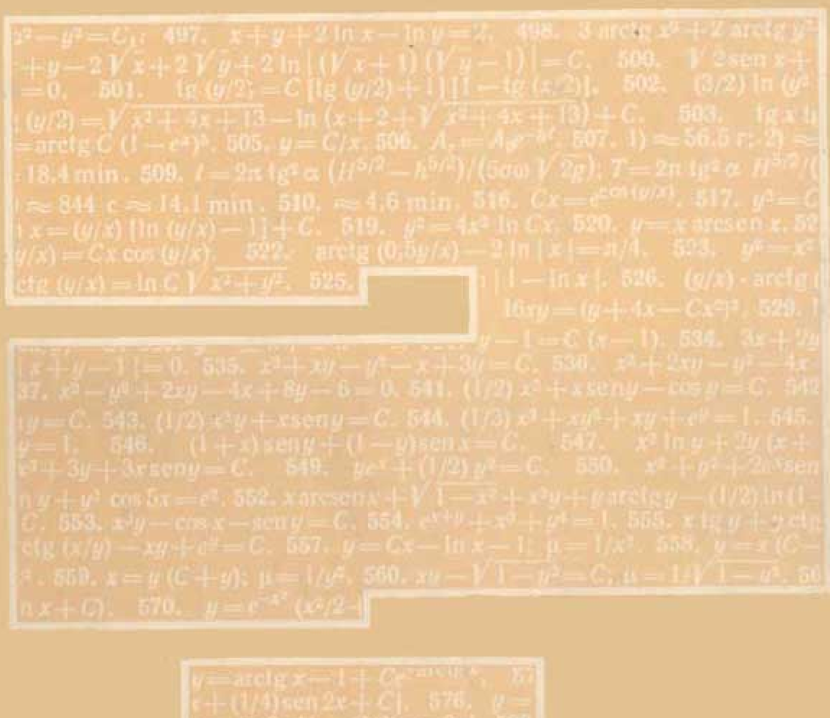
P. E. DANKÓ, A. G. POPOV, T. YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1

PARTE



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

I

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва

P.E. DANKÓ,
A.G. POPOV,
T.YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMATICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1
PARTE

EDITORIAL · MIR ·
MOSCU

Traducido del ruso por
A. I. Samojválov

Impreso en la URSS. 1983

На испанском языке

Índice

Prefacio a la edición española

En este libro hemos procurado desarrollar las nociones y teoremas principales de un curso moderno de Matemáticas Superiores para los centros de enseñanza superior, presentando ejercicios y problemas seleccionados sistemáticamente.

Cada párrafo es precedido por una breve introducción compuesta de las definiciones y los conceptos matemáticos principales del material dado. Para mejor asimilación, las cuestiones teóricas más difíciles van acompañadas de la explicación de sus conceptos (sin demostraciones).

El libro (partes I y II) ha sido editado tres veces en ruso y se utiliza ampliamente en las escuelas superiores técnicas de la URSS.

Este manual es la traducción de la tercera edición modificada por el aumento del número de problemas y el agregado del décimo capítulo a la segunda parte bajo el título de «Fundamentos del cálculo de variaciones».

Quedamos profundamente reconocidos al profesor, doctor en ciencias físico-matemáticas A. V. Efímov por sus observaciones útiles y la reseña favorable a este libro, y agredecemos al candidato a doctor en ciancias físico-matemáticas V. A. Bogachev por su participación en la escritura del capítulo X de la segunda parte.

Los autores

Capítulo I. Geometría analítica del plano

§ 1. Coordenadas rectangulares y polares

1. Coordenadas sobre una recta. División del segmento en una razón dada. Al punto M del eje de coordenadas Ox que tiene la abscisa x se lo suele designar por $M(x)$.

La distancia d comprendida entre puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ del eje, cualquiera que sea la posición de los puntos sobre el eje, se determina por la fórmula

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1}$$

Sea dado sobre una recta arbitraria un segmento $[AB]$ (A, es el extremo inicial del segmento; B, su extremo final); entonces cualquier otro punto C de esta recta divide el segmento $[AB]$ en cierta razón λ, donde $\lambda = \pm |AC| : |CB|$. Si los segmentos $[AC]$ y $[CB]$ están orientados en un mismo sentido, entonces a λ se le atribuye el signo «+»; pero si los segmentos $[AC]$ y $[CB]$ están orientados en sentidos opuestos, a λ se le atribuye el signo «—». En otras palabras, λ es positiva si el punto C se halla entre los puntos A y B y es negativa si el punto C se encuentra sobre la recta fuera del segmento $[AB]$.

Si los puntos A y B se hallan sobre el eje Ox, entonces la coordenada x del punto $C(x)$ que divide en la razón λ el segmento comprendido entre los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ se determina por la fórmula

$$x = \frac{x_2 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

En particular, si $\lambda = 1$ se obtiene la fórmula para la coordenada del punto medio del segmento:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$

1. Construir sobre la recta los puntos $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3,5)$.

2. El segmento $[AB]$ está dividido por cuatro puntos en cinco partes congruentes. Determinar la coordenada del punto de división más próximo a A si $A(-3)$, $B(7)$.

Resolución. Sea $C(x)$ el punto buscado; entonces $\lambda = |AC| : |CB| = 1/4$. Por consiguiente, por la fórmula (2) encontramos

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + (1/4)\, 7}{1 + 1/4} = -1, \quad \text{o sea, } C(-1).$$

3. Se conocen los puntos A (1), B (5), que son los extremos del segmento $|AB|$; fuera de este segmento se halla un punto C cuya distancia al punto A es tres veces mayor que con respecto a B. Determinar la coordenada del punto C.

Resolución. Es fácil ver que $\lambda = -|AC| : |BC| = -3$ (recomendamos trazar el dibujo). De este modo,

$$\bar{x} = \frac{1-3\cdot 5}{1-3} = 7, \quad \text{o sea } C\,(7).$$

4. Determinar la distancia comprendida entre los puntos: 1) M (3) y N (-5); 2) P ($-11/2$) y Q ($-5/2$).

5. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento si son conocidos los extremos de éste: 1) A (-6) y B (7); 2) C (-5) y D (1/2).

6. Hallar el punto M simétrico al punto N (-3) con respecto al punto P (2).

7. Un segmento $[AB]$ está dividido por dos puntos en tres partes congruentes. Determinar las coordenadas de los puntos de la división si A (-1), B (5).

8. Se dan los puntos A (-7), B (-3). Fuera de un segmento $[AB]$ se hallan situados los puntos C y D, siendo $|CA| = |BD| = 0{,}5\,|AB|$. Determinar las coordenadas de los puntos C y D.

2. Coordenadas rectangulares sobre un plano. Problemas elementales. Si sobre un plano se da un sistema cartesiano de coordenadas xOy, entonces el punto M de este plano, que tiene las coordenadas x e y, se designa por $M\,(x;\,y)$.

La distancia d entre los puntos $M_1\,(x_1;\,y_1)$ y $M_2\,(x_2;\,y_2)$ se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

En particular, la distancia d entre el punto $M\,(x;\,y)$ y el origen de las coordenadas se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Las coordenadas del punto $C\,(x;\,y)$ que divide en una razón dada λ (véase el punto 1) el segmento entre los puntos $A\,(x_1;\,y_1)$ y $B\,(x_2;\,y_2)$ se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

En particular, si $\lambda = 1$, se obtienen las fórmulas para las coordenadas del punto medio del segmento:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

El área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$, $C\,(x_3;\,y_3)$, se determina por la fórmula

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,| = \\ &= \frac{1}{2}\,|\,(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\,|. \end{aligned} \tag{5}$$

La fórmula para el área del triángulo se puede escribir de la forma

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta|. \tag{6}$$

donde

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

(la noción de determinante de tercer orden se da en el § 5 de este capítulo).

9. Construir sobre un plano de coordenadas los puntos A (4; 3), B (—2; 5), C (5; —2), D (—4; —3), E (—6; 0), F (0; 4).

10. Determinar la distancia entre los puntos A (3; 8) y B (—5; 14).

Resolución. Aplicando la fórmula (1) obtenemos

$$d=\sqrt{(-5-3)^2+(14-8)^2}=\sqrt{64+36}=10.$$

11. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos A (—3; —3), B (—1; 3), C (11; —1) es rectangular.

Resolución. Hallamos las longitudes de los lados del triángulo:

$$|AB|=\sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2}=\sqrt{40},$$
$$|BC|=\sqrt{(11+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{160},$$
$$|AC|=\sqrt{(11+3)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{200}.$$

Como $|AB|^2=40$, $|BC|^2=160$, $|AC|^2=200$, entonces $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$. Ahora bien, la suma de los cuadrados de dos lados del triángulo es igual al cuadrado del tercero. De aquí se deduce que el triángulo ABC es rectángulo y el lado AC es su hipotenusa.

12. Son conocidos los puntos A (—2; 5), B (4; 17), o sea, los extremos del segmento $[AB]$. En este segmento se halla un punto C, cuya distancia a A es dos veces mayor que a B. Determinar las coordenadas del punto C.

Resolución. Como $|AC|=2|CB|$, entonces $\lambda=|AC|:|CB|=2$. Aquí $x_1=-2$, $y_1=5$, $x_2=4$, $y_2=17$. Por lo tanto,

$$\bar{x}=\frac{-2+2\cdot 4}{1+2}=2,\quad \bar{y}=\frac{5+2\cdot 17}{1+2}=13,\quad \text{o sea } C\ (2;\ 13).$$

13. El punto C (2; 3) sirve de punto medio del segmento $[AB]$. Determinar las coordenadas del punto A si B (7; 5).

Resolución. Aquí $\bar{x}=2$, $\bar{y}=3$, $x_2=7$, $y_2=5$, de donde $2=(x_1+7)/2$, $3=(y_1+5)/2$. Por consiguiente, $x_1=-3$; $y_1=1$, es decir, A (—3; 1).

14. Se dan los vértices del triángulo ABC: A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$, C $(x_3;\ y_3)$. Determinar las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo.

Resolución. Hallamos las coordenadas del punto D, o sea, del punto medio del segmento $[AB]$; tenemos

$$x_D=(x_1+x_2)/2,\quad y_D=(y_1+y_2)/2.$$

El punto M, en que se intersecan las medianas, divide el segmento $[CD]$ en la razón 2 : 1 contando a partir del punto C. Por lo tanto, las coordenadas del punto M se determinan por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{x_3+2x_D}{1+2},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2y_D}{1+2},$$

o, sea

$$\bar{x}=\frac{x_3+2(x_1+x_2)/2}{3}, \quad \bar{y}=\frac{y_3+2(y_1+y_2)/2}{3}.$$

Finalmente obtenemos

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

15. *Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos* $A(-2; -4)$, $B(2; 8)$ y $C(10; 2)$.

Resolución. Usando la fórmula (5), obtenemos

$$S=\frac{1}{2}\cdot|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)|=\frac{1}{2}|24-144|=$$

$$=60 \text{ (unidades cuadradas).}$$

16. Determinar la distancia entre los puntos: 1) $A(2; 3)$ y $B(-10; -2)$; 2) $C(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$ y $D(2\sqrt{2}; 0)$.

17. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(4; 3)$, $B(7; 6)$ y $C(2; 11)$, es rectángulo.

18. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(2; -1)$, $B(4; 2)$ y $C(5; 1)$, es isósceles.

19. Se dan los vértices del triángulo: $A(-1; -1)$, $B(0; -6)$ y $C(-10; -2)$. Hallar la longitud de la mediana trazada por el vértice A.

20. Se dan los extremos del segmento $[AB]$: $A(-3; 7)$ y $B(5, 11)$. Este segmento está dividido por tres puntos en cuatro partes congruentes. Determinar las coordenadas de los puntos de división.

21. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1; 5)$, $B(2; 7)$, $C(4; 11)$.

22. Se dan tres vértices sucesivos de un paralelogramo: $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Determinar las coordenadas del cuarto vértice.

23. Se dan dos vértices del triángulo $A(3; 8)$ y $B(10; 2)$ y el punto de intersección de las medianas $M(1; 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice del triángulo.

24. Se dan los vértices del triángulo: $A(7; 2)$, $B(1; 9)$ y $C(-8; -11)$. Hallar las distancias del punto de intersección de las medianas a los vértices del triángulo.

25. Los puntos $L(0; 0)$, $M(3; 0)$ *y* $N(0; 4)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Calcular el área del triángulo.

3. Coodenadas polares. En el sistema polar de coordenadas la posición del punto M sobre un plano se determina por su distancia $|OM|=\rho$ al polo O (ρ es el *radio vector polar* del punto) y por el ángulo θ que el segmento $[OM]$ forma con el eje polar Ox (θ es el *ángulo polar* del punto). El ángulo θ se considera positivo si se lee a partir del eje polar en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Si un punto M tiene las coordenadas polares $\rho>0$ y $\theta>0$, donde $0\leqslant\theta<$ $<2\pi$, entonces a él le corresponde también un conjunto innumerable de pares de coordenadas polares $(\rho; \theta+2k\pi)$ y $[-\rho; \theta+(2k+1)\pi]$ donde $k\in\mathbf{Z}$.

Si el origen del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares se hace coincidir con el polo y el eje Ox con el eje polar, entonces las coordenadas rectangulares x e y del punto M y sus coordenadas polares ρ y θ están relacionadas por las fórmulas siguientes:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta; \tag{1}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta=y/x. \tag{2}$$

26. Construir los puntos definidos por las coordenadas polares: $A\ (4;\ \pi/4)$, $B\ (2;\ 4\pi/3)$, $C\ (3;\ -\pi/6)$, $D\ (-3;\ \pi/3)$, $E\ (0;\ \alpha)$, $F\ (-1;\ -3\pi/4)$.

27. Hallar las coordenadas polares del punto $M\ (1;\ -\sqrt{3})$ si el polo coincide con el origen de las coordenadas y el eje polar, con el sentido positivo del eje de las abscisas.

Resolución. En virtud de las igualdades (2) hallamos

$$\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2;\quad \operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}.$$

Es evidente que el punto M se halla en el IV cuadrante y, por lo tanto, $\theta=5\pi/3$. De este modo, $M\ (2;\ 5\pi/3)$.

28. Hallar las coordenadas rectangulares del punto $A\ (2\sqrt{2};3\pi/4)$ si el polo coincide con el origen de coordenadas y el eje polar, con el eje de las abscisas.

Resolución. Aplicando las fórmulas (1), tenemos

$$x=2\sqrt{2}\cos(3\pi/4)=-2,\quad y=2\sqrt{2}\operatorname{sen}(3\pi/4)=2.$$

De suerte que $A\ (-2;\ 2)$.

29. Hallar las coordenadas polares de los puntos: $A\,(2\sqrt{3};\ 2)$, $B\,(0;\ -3)$, $C\,(-4;4)$, $D\,(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $E\,(-\sqrt{2};\ -\sqrt{6})$, $F\,(-7;0)$.

30. Hallar las coordenadas rectangulares de los puntos: $A\ (10;\ \pi/2)$, $B\ (2;\ 5\pi/4)$, $C\ (0;\ \pi/10)$, $D\ (1;\ -\pi/4)$, $E\ (-1;\ \pi/4)$, $F\ (-1;\ -\pi/4)$.

31. Determinar la distancia entre los puntos $M_1\ (\rho_1;\ \theta_1)$ y $M_2\ (\rho_2;\ \theta_2)$.

Indicación: aplicar al triángulo OM_1M_2 el teorema del coseno.

32. Determinar la distancia entre los puntos $M\ (3;\ \pi/4)$ y $N\ (4;\ 3\pi/4)$.

33. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto al eje polar.

34. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto al polo.

35. Hallar las coordenadas polares de los puntos simétricos a los puntos $(3;\ \pi/6)$, $(5;\ 2\pi/3)$ y $(2;\ -\pi/6)$: 1) con respecto al polo; 2) con respecto al eje polar.

36. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto a la recta que pasa por el polo perpendicularmente al eje polar.

4. Ecuación de una línea. A toda línea sobre un plano xOy considerada como un conjunto de puntos, le corresponde cierta ecuación que relaciona las coordenadas de todo punto $M\ (x;\ y)$ («punto corriente») perteneciente a esta línea. Tal ecuación se llama *ecuación de la línea dada*.

Si en la ecuación de la línea dada se sustituyen las coordenadas de cualquier punto que está sobre esta línea, entonces la ecuación se convierte en identidad. Si, empero, en la ecuación de la línea se sustituyen las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a esta línea, entonces la ecuación no se satisface.

37. Un extremo del segmento se desplaza sobre el eje de las abscisas, y el otro, sobre el eje de ordenadas. Hallar la ecuación de la línea descrita por el punto medio de este segmento si la longitud de este último es igual a c.

Resolución. Sea $M(x;\ y)$ el punto medio del segmento. La longitud del segmento $[OM]$ (longitud de la mediana) es igual a la mitad de la hipotenusa, o sea, $|OM| = c/2$. Por otro lado, $|OM| = \sqrt{x^2+y^2}$ (distancia del punto M al origen de coordenadas).

De este modo, llegamos a la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=c/2 \quad \text{ó} \quad x^2+y^2=c^2/4.$$

Esta es la ecuación de la línea buscada. Geométricamente es evidente que esta línea es la circunferencia de radio $c/2$ con el centro en el origen de coordenadas.

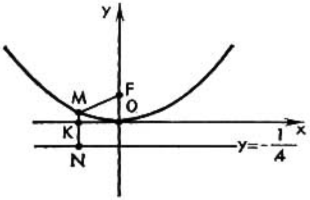


Fig. 1

38. Escribir la ecuación de una línea cuyo cada punto está alejado del punto $F(0;\ 1/4)$ a una distancia igual a la que separa este mismo punto de la recta $y = -1/4$.

Resolución. Tomemos sobre la línea buscada un punto arbitrario $M(x;\ y)$. La distancia del punto M al punto F se determina por la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$|MF|=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

La distancia del punto M a la recta $y = -1/4$ se halla a partir de consideraciones geométricas simples (fig. 1):

$$|MN|=|MK|+|KN|=y+\frac{1}{4}.$$

Puesto que, según el enunciado, la igualdad $|MF| = |MN|$ se cumple para todo punto M que pertenezca a la línea buscada, entonces la ecuación de esta línea se puede escribir de la forma

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=y+\frac{1}{4}, \quad \text{o bien} \quad x^2+y^2-\frac{1}{2}y+$$
$$+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

o sea, $y = x^2$.

La línea determinada por la ecuación $y = x^2$ se llama *parábola.*

39. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que el producto de sus distancias a los puntos $F_1(a;\ 0)$ y $F_2(-a;\ 0)$ sea una constante igual a a^2.

Resolución. Tomemos sobre la curva buscada un punto arbitrario $M(x;\ y)$. Sus distancias a los puntos $F_1(a_1;\ 0)$ y $F_2(-a;\ 0)$ son $r_1 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$,

$r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. De las condiciones del problema se deduce que $r_1 r_2 = a^2$. De este modo, la curva buscada tiene la ecuación

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2.$$

Llevamos esta ecuación a la forma racional:

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + 2ax) = a^4,$$

o sea,

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

o, por fin,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

La curva hallada se llama *lemniscata*.

40. Escribir la ecuación de la lemniscata en las coordenadas polares y construir la curva.

Resolución. En la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (véase el problema precedente) pasamos a las coordenadas polares por las fórmulas $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$. Entonces obtendremos

$$(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta)^2 = 2a^2(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^2\theta), \quad \text{o bien } \rho^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Esta es la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares.

Construimos la curva. Despejando ρ en la ecuación hallamos $\rho = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Debido a que en el segundo miembro de la igualdad está el signo doble «$\pm$», así como del hecho de que la ecuación no varía al sustituir θ por $-\theta$, deducimos de que la lemniscata se halla situada simétricamente con respecto a los ejes Ox y Oy. Investiguemos la forma de la lemniscata para el primer cuadrante o sea, para el caso cuando $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < \pi/2$. Para estos valores de ρ y θ tenemos $\rho = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}$. No es difícil ver que θ puede variar sólo en el intervalo de 0 a $\pi/4$. Así pues, la parte respectiva de la curva está comprendida entre el eje polar y la semirrecta $\theta = \pi/4$. Si $\theta = 0$, entonces $\rho = a\sqrt{2}$. Al crecer θ de 0 a $\pi/4$ la magnitud ρ decrecerá hasta el valor de $\rho = 0$.

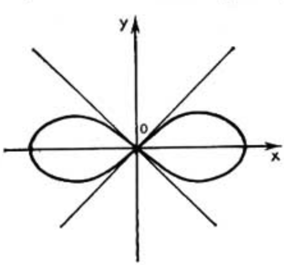


Fig. 2

Teniendo en cuenta las consideraciones de simetría, podemos construir la lemniscata (fig. 2).

41. Escribir la ecuación del conjunto de los puntos equidistantes de los puntos A (1; 1) y B (3; 3).

Resolución. Supongamos que el punto M pertenece al conjunto buscado; entonces $|MA| = |MB|$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos hallamos

$$|MA| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},$$
$$|MB| = \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

y la ecuación de la línea puede ser escrita de la forma

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, obtendremos

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9,$$

de donde, una vez reducidos los términos semejantes, llegamos finalmente a la ecuación

$$x + y - 4 = 0.$$

De este modo, el conjunto buscado es una recta que, como es sabido, sirve de perpendicular media al segmento $|AB|$.

42. Un punto M se desplaza uniformemente sobre una semirrecta que gira con movimiento uniforme en torno al polo. Escribir la ecuación de la línea descrita por el punto M si en el momento inicial la semirrecta en rotación coincide con el eje polar y el punto M, con el polo; al girar la semirrecta en el ángulo $\theta = 1$ (un radián) el punto M se ha alejado del polo en una distancia a.

Resolución. Puesto que en el momento inicial las magnitudes ρ y θ son iguales a cero y luego ambas crecen proporcionales en el tiempo, es fácil ver que ellas están relacionadas por la dependencia proporcional directa: $\rho/\theta = \text{const}$. Pero $\rho = a$ cuando $\theta = 1$; por consiguiente, $\rho/\theta = a/1$, o sea, $\rho = a\theta$. La curva $\rho = a\theta$ se llama *espiral de Arquímedes*.

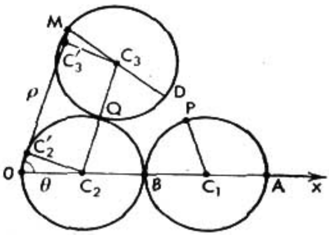


Fig. 3

43. La circunferencia de diámetro a rueda sin deslizar por el lado exterior de otra circunferencia de mismo diámetro. Escribir en las coordenadas polares la ecuación de la línea descrita por cierto punto fijo de la circunferencia rodante.

Resolución. En la fig. 3: C_1 es la posición inicial del centro de la circunferencia rodante; A, la posición inicial del punto que describe la línea buscada (el punto A es diametralmente opuesto al punto B donde, en el momento inicial, se encuentran en contacto las circunferencias); C_2 es el centro de la circunferencia fija; C_3 es el centro de la circunferencia rodante que está en una nueva posición; M, la nueva posición del punto A que describe la línea buscada. (Una vez desplazada la circunferencia C_1 a la posición C_3, el punto P ocupará la posición Q. El punto B ocupará la posición D, puesto que el rodamiento ocurre sin deslizar, $\breve{BQ} = \breve{DQ}$, $\widehat{QC_2B} = \widehat{QC_3D}$).

En el dibujo se muestra la posición del polo O y del eje polar Ox. Se exige escribir la ecuación a la cual satisfacen las coordenadas de cualquier punto M (ρ; θ) de la línea buscada.

No es difícil ver que $\widehat{MC_3Q} = \widehat{OC_2Q}$, en virtud de lo cual el cuadrilátero OC_2C_3M es un trapecio isósceles con la base menor $|C_2C_3| = a$; C_2C_2' y C_3C_3' son las perpendiculares a la recta OM que pasan por los puntos C_2 y C_3. De este modo,

$$|\rho| = |OC_2'| + |C_2'C_3'| + |C_3'M| =$$

$$= \frac{a}{2}\cos\theta + a + \frac{a}{2}\cos\theta = a\,(1 + \cos\theta).$$

Por esto, la ecuación de la línea buscada en las coordenadas polares tiene la forma $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$; esta curva se llama *cardioide*.

Puesto que al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación de la cardioide no varía, esta última está situada simétricamente con respecto al eje polar. Si θ varía de 0 a π, entonces ρ decrece de $2a$ a 0.

44. Hallar la ecuación del conjunto de puntos equidistantes de los puntos A (2; 0) y B (0; 1).

45. ¿Qué línea se define por la ecuación $x = y$?

46. ¿Qué línea se define por la ecuación $x = -y$?

47. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A (2; 0) y B (0; 2) sea igual al cuadrado de la distancia entre los puntos A y B.

48. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que la suma de sus distancias a los puntos A (1; 0) y B (0; 1) sea igual a 2.

49. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia con centro en el polo.

50. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una semirrecta que pasa por el polo y forma con el eje polar un ángulo α.

51. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia de diámetro a si el polo está sobre la circunferencia y el eje polar pasa por el centro de la misma.

5. Ecuaciones paramétricas de una línea. Al buscar la ecuación de un conjunto de los puntos resulta, a veces, más cómodo expresar las coordenadas

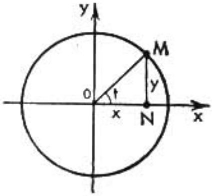


Fig. 4

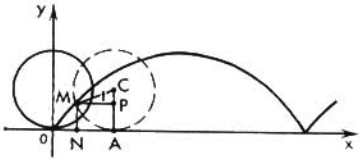


Fig. 5

x e y de un punto arbitrario de este conjunto por medio de cierta magnitud auxiliar t (llamada *parámetro*), o sea, examinar el sistema de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Tal representación de la línea buscada se llama *paramétrica* y las ecuaciones del sistema han recibido el nombre de *ecuaciones paramétricas de la línea dada*.

La eliminación del parámetro t a partir del sistema (si ello es posible) lleva a una ecuación que relaciona x e y, o sea a una ecuación ordinaria de la línea que tiene la forma $f(x, y) = 0$.

52. Escribir las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Resolución. Examinemos una circunferencia de radio a con centro en el origen de las coordenadas (fig. 4). Tomamos sobre esta circunferencia un punto arbitrario M (x; y). Adoptamos el ángulo formado por el radio OM con el eje de abscisas como parámetro t. Del triángulo OMN se deduce que $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$. De este modo, las ecuaciones

$$x = a \cos t; \quad y = a \operatorname{sen} t$$

son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

Eliminando de estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación ordinaria de una circunferencia. En el caso dado, para eliminar el parámetro basta elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones y sumar

$$+\begin{array}{l} x^2 = a^2 \cos^2 t \\ y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t \\ \hline x^2 + y^2 = a^2. \end{array}$$

La última expresión es la ecuación de una circunferencia de radio a con centro en el origen de coordenadas.

53. Escribir las ecuaciones paramétricas de una curva escrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin deslizar por una recta fija.

Resolución. Supongamos que una circunferencia de radio a rueda sin deslizar a la derecha por una recta horizontal (fig. 5). Tomamos esta recta como el eje Ox colocando el origen de coordenadas en cierto punto O del eje. Tomamos como punto fijo de la circunferencia (por el desplazamiento del cual se forma la curva buscada) aquel que coincide con el punto O al encontrarse la circunferencia en la posición respectiva. Tomamos como parámetro t el ángulo de giro del radio de la circunferencia que pasa por el punto fijo.

Supongamos que en cierto instante de tiempo la circunferencia es tangente al eje en el punto A. El punto fijo de la circunferencia ocupará la posición $M(x;\ y)$, correspondiente al ángulo t de giro del radio CM ($t = \widehat{ACM}$). Como el rodamiento ocurre sin deslizar, entonces $|OA| = \smile{MA} = at$. Usando esto, expresemos las coordenadas del punto M por t:

$$x = |ON| = |OA| - |NA| = \overset{\smile}{MA} - |NA| = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t),$$

$$y = |NM| = |AP| = |AC| - |PC| = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas de la línea buscada tienen la forma

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Esta línea se llama *cicloide* y se muestra en la fig. 5.

54. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^2$?

Resolución. Eliminando el parámetro t, llegamos a la ecuación $y = x$. Pero en virtud de las ecuaciones paramétricas $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas dadas definen la semirrecta-bisectriz del ángulo de las coordenadas del primer cuadrante.

55. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \cos^2 t$?

Resolución. Reemplazando al $\cos t$ por x en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación de la parábola $y = x^2$. De las ecuaciones paramétricas se deduce que $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Ahora bien, las ecuaciones paramétricas definen el arco AOB de la parábola $y = x^2$, donde $A(-1;\ 1)$; $B(1;\ 1)$.

56. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{cosec} t$?

Resolución. Puesto que $y = 1/\operatorname{sen} t$, entonces, eliminando t, obtenemos la ecuación $y = 1/x$ que expresa la dependencia inversamente proporcional de las magnitudes x e y. Teniendo en cuenta que $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$, deducimos que la línea definida por las ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\, t$, $y = \text{cosec}\, t$, tiene la forma representada en la fig. 6.

57. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = 2t$, $y = 4t$?

58. La curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$, $y = b \,\text{sen}\, t$. Hallar su ecuación en el sistema rectangular de coordenadas.

Indicación: dividir la primera ecuación por a y la segunda por b; luego eliminar t.

59. La curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = a \sec t, y = b \,\text{tg}\, t$. Hallar su ecuación en el sistema rectangular de coordenadas.

60. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = \cos^2 t$, $y = \text{sen}^2 t$?

61. La curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 t$, $y = a \,\text{sen}^3 t$ se llama *astroide*. Eliminando t, hallar la ecuación de la astroide en el sistema rectangular de coordenadas.

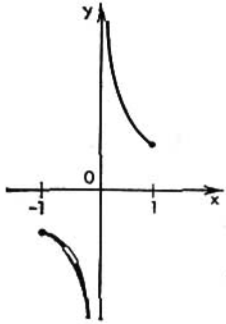


Fig. 6

62. El círculo de centro O y radio a lleva arrollado un hilo en el sentido de las agujas del reloj; supongamos que el extremo del hilo se encuentra en el punto A $(a;\, 0)$. Vamos a desenrollar el hilo (en el sentido contrario al de las agujas del reloj) quitándolo del círculo y siempre tensándolo al tirar de su extremo. Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el extremo del hilo si como parámetro t se toma el ángulo entre el radio OA y el radio OB trazado al punto de tangencia de la curcunferencia con el hilo tenso, para una posición arbitraria de este último.

§ 2. La recta

1. Ecuación general de una recta. Toda ecuación de primer grado con respecto a x e y, es decir que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0$$

(donde A, B y C son coeficientes constantes, además, $A^2 + B^2 \neq 0$) define sobre un plano cierta recta. Esta expresión se llama *ecuación general* de una recta.

Casos particulares. 1. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax + By = 0$ pasa por el origen de coordenadas.

2. $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. La recta definida por la ecuación, $By + C = 0$ (o $y = b$, donde $b = -C/B$), es paralela al eje Ox.

3. $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax + C = 0$ (o $x = a$, donde $a = -C/A$), es paralela al eje Oy.

4. $B = C = 0$; $A \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax = 0$ (o $x = 0$, dado que $A \neq 0$), coincide con el eje Oy.

5. $A = C = 0$; $B \neq 0$. La recta definida por la ecuación $By = 0$ (o $y = 0$, dado que $b \neq 0$), coincide con el eje Ox.

2. Ecuación de la recta con un coeficiente angular. Si en la ecuación general de una recta $B \neq 0$, entonces, despejando y, obtenemos la ecuación que tiene la forma

$$y = kx + b$$

(aquí $k = -A/B$, $b = -C/B$). Ella se llama *ecuación con coeficiente angular* o ecuación con pendiente, puesto que $k = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo formado por la recta con el sentido positivo del eje Ox. El término independiente de la ecuación b es igual a la ordenada del punto de intersección con el eje Oy.

3. **Ecuación segmentaria de una recta.** Si en la ecuación general de la recta $C \neq 0$, entonces, dividiendo todos sus terminos por $-C$, obtenemos la ecuación que tiene la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(aquí $a = -C/A$, $b = -C/B$). Ella se llama *ecuación segmentaria de una recta*; en la misma a es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje Ox y b es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Oy. Por eso a y b se denominan segmentos de la recta sobre los ejes de las coordenadas.

4. **Ecuación normal de una recta.** Si ambos miembros de la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ se multiplican por el número $\mu = 1/(\pm\sqrt{A^2+B^2})$ (llamado *factor normalizador*), además, de tal modo que el signo delante del radical se escoja para que se cumpla la condición $\mu \cdot C < 0$, entonces se obtiene la ecuación

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \operatorname{sen}\varphi - p = 0.$$

Ella se denomina *ecuación normal* de una recta. Aquí p es la longitud de la perpendicular a la recta que pasa por el origen de las coordenadas y φ es el ángulo formado por esta perpendicular con el sentido positivo del eje Ox.

63. Escribir la ecuación de la recta que trunca sobre el eje de ordenadas el segmento $b = -3$ y forma con el sentido positivo del eje de abscisas el ángulo $\alpha = \pi/6$.

Resolución. Hallamos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Utilizando la ecuación de la recta con un coeficiente angular, obtenemos $y = (1/\sqrt{3})\,x - 3$; suprimiendo los denominadores y transponiendo todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación general de la recta $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$.

64. Escribir la ecuación de la recta que corta sobre los ejes de coordenadas los segmentos $a = 2/5$, $b = -1/10$.

Resolución. Usando la ecuación segmentaria de una recta, tenemos

$$\frac{x}{2/5} + \frac{y}{(-1/10)} = 1.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma $(5/2)\,x - 10y = 1$, o bien $5x - 20y - 2 = 0$ (ecuación general de la recta).

65. Se da la ecuación general de la recta $12x - 5y - 65 = 0$. Ecribir: 1) la ecuación con coeficiente angular; 2) la ecuación segmentaria; 3) la ecuación normal.

Resolución. 1) Despejando y en la ecuación de la recta, obtenemos la ecuación con coeficiente angular:

$$y = (12/5)\,x - 13.$$

Aquí $k = 12/5$, $b = -13$.

2) Transponemos el término independiente de la ecuación general al segundo miembro y dividimos ambos miembros por 65; nos queda $(12/65)\,x - (5/65)\,y =$

$= 1$. Escribiendo la última ecuación en la forma

$$\frac{x}{65/12}+\frac{y}{(-65/5)}=1,$$

obtenemos la ecuación segmentaria de la recta dada. Aquí $a = 65/12$ $b = -65/5 = -13$.

3) Hallamos el factor normalizador $\mu = 1/\sqrt{12^2 + (-5)^2} = 1/13$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación general por este factor, obtenemos la ecuación normal de la recta

$$(12/13)\,x - (5/13)\,y - 5 = 0.$$

Aquí $\cos\varphi = 12/13$, $\operatorname{sen}\varphi = -5/13$, $p = 5$.

66. Construir las rectas: 1) $x - 2y + 5 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $5x - 2 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$.

Resolución. 1) Suponiendo que en la ecuación $x = 0$, obtenemos $y = 5/2$. Por consiguiente, la recta se interseca con el eje de ordenadas en el punto B $(0;\ 5/2)$. Suponiendo que $y = 0$, obtenemos $x = -5$, o sea, la recta se interseca con el eje de abscisas en el punto A $(-5;\ 0)$. Queda trazar la recta por los puntos A y B (fig. 7).

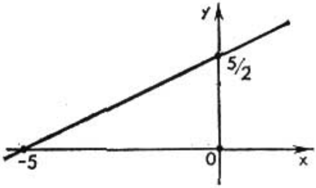


Fig. 7

2) La recta $2x + 3y = 0$ pasa por el origen de las coordenadas, ya que en su ecuación falta el término independiente. Asignamos a x en la ecuación de la recta un valor cualquiera. Supongamos, por ejemplo, que $x = 3$, entonces $6 + 3y = 0$, o sea, $y = -2$; obtendremos el punto M $(3;\ -2)$. Queda trazar la recta por el origen de coordenadas y el punto M.

3) Despejando x en la ecuación de la recta, obtenemos $x = 2/5$. Esta recta es paralela al eje de las ordenadas y corta sobre el eje de abscisas un segmento igual a $2/5$.

4) Obtenemos análogamente la ecuación $y = -7/2$; esta recta es paralela al eje de abscisas.

67. Se da la ecuación de la recta $(x + 2\sqrt{5})/4 + (y - 2\sqrt{5})/2 = 0$. Escribir: 1) la ecuación general de esta recta; 2) la ecuación con el coeficiente angular; 3) la ecuación segmentaria de la recta; 4) la ecuación normal.

68. ¿Qué ángulo forma la recta $2x + 2y - 5 = 0$ con el sentido positivo del eje de las abscisas?

69. Determinar el área del triángulo formado por la recta $4x + 3y - 36 = 0$ y los ejes de las coordenadas.

70. ¿Se puede escribir como segmentaria la ecuación de la recta $20x + 21y = 0$?

71. Construir las rectas: 1) $4x - 5y + 15 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $7x - 10 = 0$; 4) $2y + 3 = 0$.

72. Escribir la ecuación de la recta que corta sobre el eje de las ordenadas el segmento $b = 1$ y forma con el sentido positivo del eje de abscisas el ángulo $\alpha = 2\pi/3$.

73. La recta corta, sobre los ejes de las coordenadas, segmentos positivos congruentes. Escribir la ecuación de la recta si el área del triángulo formado por la recta y los ejes de las coordenadas es igual a 8 unidades cuadradas.

74. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el origen de las coordenadas y el punto A (—2; —3).

75. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2; 5) y corta, sobre el eje de las ordenadas, el segmento $b = 7$.

76. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto M (—3; —4) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

77. Escribir la ecuación de la recta que corta segmentos congruentes sobre los ejes de las coordenadas, si la longitud del segmento de la recta comprendido entre los ejes de coordenadas es igual a $5\sqrt{2}$.

5. Angulo entre dos rectas. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. *El ángulo agudo entre las rectas* $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|. \tag{1}$$

Condición de paralelismo de las rectas: $k_1 = k_2$.

Condición de perpendicularidad de las rectas: $k_1 = -1/k_2$.

La ecuación de la recta que tiene el coeficiente angular k y pasa por el punto M $(x_1; y_1)$ se escribe de la forma

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 $(x_1; y_1)$ y M_2 $(x_2; y_2)$ se escribe en la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$

y el coeficiente angular de esta recta se encuentra por la fórmula

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Si $x_1 = x_2$, entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 tiene la forma $x = x_1$.

Si $y_1 = y_2$, luego la ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 tiene la forma $y = y_1$.

6. Intersección de rectas. Distancia de un punto a la recta. Haz de rectas. Si $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, entonces las coordenadas del punto de intersección de las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ se hallan resolviendo conjuntamente las ecuaciones de estas rectas.

La distancia del punto M $(x_0; y_0)$ *a la recta* $Ax + By + C = 0$ se halla por la fórmula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{1}$$

Las bisectrices de los ángulos entre las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tienen las ecuaciones

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{2}$$

Si las rectas intersecadas están representadas por las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, entonces la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{3}$$

donde el factor numérico λ, determina una línea recta que pasa por el punto de intersección de las rectas representadas. Atribuyendo a λ diversos valores en la última ecuación, obtendremos diversas rectas pertenecientes a un *haz* de rectas cuyo centro es el punto de intersección de las rectas dadas.

78. Determinar el ángulo agudo entre las rectas $y = -3x + 7$ e $y = 2x + 1$.

Resolución. Haciendo $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ en la fórmula (1) del apartado 5, obtenemos

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2} \right| = 1, \quad \text{o sea,} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

79. Mostrar que las rectas $4x - 6y + 7 = 0$ y $20x - 30y - 11 = 0$, son paralelas.

Resolución. Reduciendo la ecuación de cada recta a la forma con coeficiente angular, obtenemos

$$y = (2/3)\, x + 7/6 \quad \text{e} \quad y = (2/3)\, x - 11/30.$$

Los coeficientes angulares de estas rectas son iguales: $k_1 = k_2 = 2/3$, o sea, las rectas son paralelas.

80. Mostrar que las rectas $3x - 5y + 7 = 0$ y $10x + 6y - 3 = 0$ son perpendiculares.

Resolución. Una vez reducidas las ecuaciones a la forma con coeficiente angular, obtenemos

$$y = (3/5)\, x + 7/5 \quad \text{e} \quad y = (-5/3)\, x + 1/2.$$

Aquí $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$. Como $k_1 = -1/k_2$, las rectas son perpendiculares

81. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M(-1;\ 3)$ y $N(2;\ 5)$.

Resolución. Suponiendo que $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$ en la ecuación (3) del apartado 5, obtenemos

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+1}{2+1}, \quad \text{o bien} \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+1}{3}.$$

Así, la ecuación tiene la forma $2x - 3y + 11 = 0$.

Es útil verificar que la ecuación está correctamente formulada. Para esto es suficiente mostrar que las coordenadas de los puntos M y N satisfacen la ecuación de la recta. En efecto, las igualdades $2(-1) - 3\cdot 3 + 11 = 0$, $2\cdot 2 - 3\cdot 5 + 11 = 0$ se cumplen idénticamente.

82. Componer la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2;\ 4)$ y $B(-2;\ -1)$.

Resolución. Como $x_1 = x_2 = -2$, entonces la recta tiene la ecuación $x = -2$ (es paralela al eje de las ordenadas).

83. Mostrar que las rectas $3x - 2y + 1 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$ se intersecan y hallar las coordenadas de los puntos de intersección.

Resolución. Como $3/2 \neq (-2)/5$, las rectas se intersecan. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ 2x+5y-12=0, \end{cases}$$

hallamos $x = 1$, $y = 2$, o sea las rectas se intersecan en el punto $(1; 2)$.

84. Determinar la distancia del punto $M(x_0; y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, sin emplear la ecuación normal de la recta.

Resolución. El problema se reduce a la determinación de la distancia entre los puntos $M(x_0; y_0)$ y N, donde N es la base de la perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto. Planteamos la ecuación de la recta (MN). Puesto que el coeficiente angular de la recta definida es igual a $-A/B$, el coeficiente angular de la recta (MN) es igual a B/A (según la condición de perpendicularidad) y la ecuación de esta última tiene la forma $y - y_0 = (B/A)(x - x_0)$. Esta ecuación se puede escribir de la forma $(x - x_0)/A = (y - y_0)/B$.

Para determinar las coordenadas del punto N, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad (x - x_0)/A = (y - y_0)/B.$$

Introducimos la incógnita auxiliar t:

$$(x - x_0)/A = (y - y_0)/B = t.$$

Entonces $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la recta dada, obtenemos $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$, de donde

$$t = -(Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2).$$

Sustituyendo ahora el valor de t en las ecuaciones $x = x_0 + At$ e $y = y_0 + Bt$, determinamos las coordenadas del punto N:

$$x = x_0 - A\cdot\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \quad y = y_0 - B\cdot\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + A^2}.$$

Sólo falta determinar la distancia entre los puntos M y N:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(A\cdot\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(B\cdot\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

85. Determinar la distancia del punto $M(1; 2)$ a la recta $20x - 21y - 58 = 0$.

Resolución. Tenemos

$$d = \frac{|20\cdot 1 - 21\cdot 2 - 58|}{\sqrt{400 + 441}} = \frac{|20 - 42 - 58|}{29} = \frac{|-80|}{29} = 2\,\frac{22}{29}.$$

86. Dada la recta l: $4x - 3y - 7 = 0$. ¿Cuáles de los puntos $A(5/2; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; -1)$, $D(0; -2)$; $E(4; 3)$, $F(5; 2)$ pertenecen a esta recta?

Resolución. Si el punto está sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la recta. Tenemos: $A \in l$, ya que $4\cdot 5/2 - 3\cdot 1 - 7 = 0$; $B \notin l$, ya que $4\cdot 3 - 3\cdot 2 - 7 \neq 0$; $C \in l$, ya que $4\cdot 1 - 3(-1) - 7 = 0$; $D \notin l$, ya que $4\cdot 0 - 3(-2) - 7 \neq 0$; $E \in l$, ya que $4\cdot 4 - 3\cdot 3 - 7 = 0$; $F \notin l$, ya que $4\cdot 5 - 3\cdot 2 - 7 \neq 0$.

87. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto M $(-2; -5)$ y es paralela a la recta $3x + 4y + 2 = 0$.

Resolución. Despejando y en la última ecuación, obtenemos $y = -(3/4)\,x - 1/2$. Por consiguiente, en virtud de la condición de paralelismo, el coeficiente angular de la recta buscada es igual a $-3/4$. Aplicando la ecuación (2) del apartado 5, obtenemos

$$y-(-5)=-\frac{3}{4}[x-(-2)], \quad \text{o sea,} \quad 3x+4y+26=0.$$

88. Se dan los vértices de triángulo: A $(2; 2)$, B $(-2; -8)$ y C $(-6; -2)$. Escribir las ecuaciones de las medianas del triángulo.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los lados BC, AC y AB:

$$x'=\frac{-2-6}{2}=-4, \qquad y'=\frac{-8-2}{2}=-5; \qquad A_1\,(4;\ -5);$$

$$x''=\frac{2-6}{2}=-2; \qquad y''=\frac{2-2}{2}=0, \qquad B_1\,(-2;\ 0);$$

$$x'''=\frac{2-2}{2}=0, \qquad y'''=\frac{2-8}{2}=-3; \qquad C_1\,(0;\ =3).$$

Encontramos las ecuaciones de las medianas con ayuda de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. La ecuación de la mediana AA_1 es

$$\frac{y-2}{-5-2}=\frac{x-2}{-4-2}, \quad \text{o bien} \quad \frac{y-2}{7}=\frac{x-2}{6}, \quad \text{es decir } 7x-6y-2=0.$$

Hallamos la ecuación de la mediana BB_1; puesto que los puntos B $(-2; -8)$ y B_1 $(-2; 0)$ tienen las abscisas iguales, la mediana BB_1 es paralela al eje de ordenadas. Su ecuación es $x + 2 = 0$.

La ecuación de la mediana CC_1 es:

$$\frac{y+2}{-3+2}=\frac{x+6}{0+6}, \quad \text{o bien} \quad x+6y+18=0.$$

89. Se dan los vértices del triángulo: A $(0; 1)$; B $(6; 5)$ y C $(12; -1)$. Escribir la ecuación de la altura del triángulo, trazada por el vértice C.

Resolución. Por la fórmula (4) del apartado 5 hallamos el coeficiente angular del lado AB:

$$k=\frac{5-1}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

En virtud de la condición de perpendicularidad, el coeficiente angular de la altura trazada por el vértice C es igual a $-3/2$. La ecuación de esta altura tiene la forma

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12), \quad \text{o bien} \quad 3x+2y-34=0.$$

90. Se dan los lados de un triángulo: $x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Hallar la longitud de la altura trazada por el vértice B.

Resolución. Determinemos las coordenadas del punto B. Resolviendo el sistema de ecuaciones $x + 3y - 7 = 0$ y $4x - y - 2 = 0$, obtendremos $x = 1$, $y = 2$, o sea, B $(1; 2)$. Hallamos la longitud de la altura BB_1 como distancia del punto B a la recta AC:

$$|BB_1|=\frac{|6\cdot 1+8\cdot 2-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}=1{,}3.$$

91. Determinar la distancia entre las rectas paralelas $3x+y-3\sqrt{10}=0$ y $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

Resolución. El problema se reduce a la determinación de la distancia entre un punto arbitrario de una recta y la otra recta. Suponiendo, por ejemplo, que en la ecuación de la primera recta $x=0$, obtenemos $y=3\sqrt{10}$. Ahora bien, $M(0;\ 3\sqrt{10})$ es el punto que está sobre la primera recta. Determinemos la distancia del punto M a la segunda recta

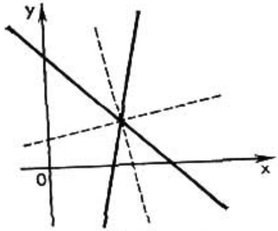


Fig. 8

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=5{,}5.$$

92. Escribir las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $x+y-5=0$ y $7x-y-19=0$(fig. 8).

Resolución. Primeramente resolvamos este problema en la forma general.

Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas son, como es sabido, el conjunto de los puntos equidistantes a estas rectas. Si las ecuaciones de las rectas dadas $A_1x+B_1y+C_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2=0$ ($A_1/A_2\neq B_1/B_2$ o sea, las rectas no son paralelas), entonces para todo punto $M(\bar{x};\ \bar{y})$ perteneciente a una de las bisectrices tenemos (utilizando la fórmula para determinar la distancia del punto a la recta):

$$\frac{|A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Puesto que $M(\bar{x};\ \bar{y})$ es un punto arbitrario de la bisectriz, se lo puede designar simplemente por $M(x;\ y)$. Teniendo en cuenta que las expresiones que están en la última igualdad bajo el signo de magnitud absoluta pueden tener diversos signos, obtenemos para una de las bisectrices la ecuación

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

y para la otra la ecuación

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

De este modo, las ecuaciones de ambas bisectrices se pueden escribir de la forma

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0.$$

Ahora vamos a resolver el problema concreto planteado. Sustituyendo A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 por sus valores indicados en las ecuaciones de las rectas dadas, obtendremos

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}}\pm\frac{7x-y-19}{\sqrt{49+1}}=0,\quad \text{o sea,}\quad 5(x+y-5)\pm(7x-y-19)=0.$$

La ecuación de una de las bisectrices se escribe de la forma

$$5(x+y-5)+(7x-y-19)=0, \quad \text{o sea,} \quad 3x+y-11=0,$$

y la ecuación de la otra, de la forma

$$5(x+y-5)-(7x-y-19)=0, \quad \text{o sea,} \quad x-3y+3=0.$$

93. Se dan los vértices del triángulo: $A(1;\ 1)$, $B(10;\ 13)$, $C(13;\ 6)$. Escribir la ecuación de la bisectriz del ángulo A.

Resolución. Usamos otro modo (en comparación con la resolución del problema precedente) de plantear la ecuación de la bisectriz.

Supongamos que D es el punto de intersección de la bisectriz con el lado BC. De la propiedad de la bisectriz del ángulo interior del triángulo se deduce que $|BD|:|DC|=|AB|:|AC|$. Pero

$$|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15, \quad |AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13.$$

Por lo tanto, $\lambda=|BD|:|DC|=15/13$. Como es conocida la razón en que el punto D divide el segmento BC, las coordenadas del punto D se determinan por las igualdades:

$$x=\frac{10+15/13\cdot 13}{1+15/13}, \quad y=\frac{13+15/13\cdot 6}{1+15/13},$$

o bien $x=325/28$, $y=259/28$, es decir, $D(325/28;\ 259/28)$. El problema se reduce al planteamiento de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y D:

$$\frac{y-1}{250/28-1}=\frac{x-1}{325/28-1}, \quad \text{o sea} \quad 7x-9y+2=0.$$

94. Se dan las ecuaciones de las alturas del triángulo ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ y las coordenadas del vértice $A(2;\ 2)$. Escribir las ecuaciones de los lados del triángulo.

Resolución. Es fácil cerciorarse de que el vértice A no está en ninguna de las alturas definidas: sus coordenadas no satisfacen las ecuaciones de estas alturas.

Sean $9x-3y-4=0$ la ecuación de la altura BB_1, y $x+y-2=0$ la ecuación de la altura CC_1. Planteemos la ecuación del lado AC examinándolo como recta perpendicular a la altura BB_1, que pasa por el punto A. Como el coeficiente angular de la altura BB_1 es igual a 3, el coeficiente angular del lado AC es de $-1/3$, o sea, $k_{AC}=-1/3$. Aplicando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene el coeficiente angular dado, obtendremos la ecuación del lado AC:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2), \quad \text{o bien,} \quad x+3y-8=0.$$

Análogamente obtenemos $k_{CC_1}=-1$, $k_{AB}=1$ y la ecuación del lado AB tiene la forma

$$y-2=x-2, \quad \text{o sea,} \quad y=x.$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las rectas AB y BB_1, así como de las rectas AC y CC_1, hallamos las coordenadas de los vértices del triángulo: $B(2/3;\ 2/3)$ y $C(-1;\ 3)$. Queda sólo por formular la ecuación del lado BC:

$$\frac{y-2/3}{3-2/3}=\frac{x-2/3}{-1-2/3}, \quad \text{es decir,} \quad 7x+5y-8=0.$$

95. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto M (5; 1) y forman con la recta $2x + y - 4 = 0$ el ángulo $\pi/4$ (fig. 9).

Resolución. Supongamos que el coeficiente angular de una de las rectas buscadas es igual a k. El coeficiente angular de la recta dada vale -2. Como el ángulo comprendido entre estas rectas es igual a $\pi/4$, entonces

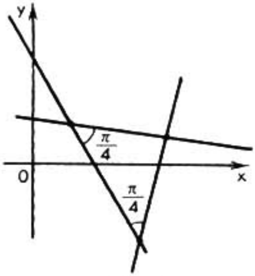


Fig. 9

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \left|\frac{k+2}{1-2k}\right|, \quad \text{o sea,} \quad 1 = \left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

de donde

$$\frac{k+2}{1-2k} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{k+2}{1-2k} = -1.$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones obtenidas, hallamos $k = -1/3$ y $k = 3$. De este modo, la ecuación de una de las rectas buscadas se escribe de la forma

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-5), \quad \text{o sea,} \quad x + 3y - 8 = 0,$$

y la ecuación de la otra recta resulta

$$y - 1 = 3(x-5), \quad \text{o sea,} \quad 3x - y - 14 = 0.$$

96. Hallar la recta que pertenece al haz $2x + 3y + 5 + \lambda(x + 8y + 6) = 0$ y pasa por el punto M (1; 1).

Resolución. Las coordenadas del punto M deben satisfacer la ecuación de la recta buscada, por eso para determinar λ obtenemos la ecuación

$$2\cdot1 + 3\cdot1 + 5 + \lambda(1 + 8\cdot1 + 6) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 10 + 15\lambda = 0,$$

$$\text{o sea,} \quad \lambda = -2/3.$$

Sustituyendo el valor de λ en la ecuación del haz, obtenemos la de la recta buscada:

$$2x + 3y + 5 - \frac{2}{3}(x + 8y + 6) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 4x - 7y + 3 = 0.$$

97. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 4y + 7 = 0$ y $5x + 2y + 3 = 0$, y es paralela al eje de las ordenadas.

Resolución. La recta pertenece al haz

$$3x - 4y + 7 + \lambda(5x + 2y + 3) = 0, \quad \text{o sea,} \quad (3 + 5\lambda)x + (-4 + 2\lambda)y + (7 + 3\lambda) = 0.$$

Como la recta buscada es paralela al eje de las ordenadas, el coeficiente de y debe ser igual a cero: $-4 + 2\lambda = 0$, o sea, $\lambda = 2$.

Queda sólo sustituir el valor hallado de λ en la ecuación del haz, de donde obtenemos la ecuación buscada $x + 1 = 0$.

98. Se dan los lados del triángulo: $x + 2y + 5 = 0$ (AB), $3x + y + 1 = 0$ (BC) y $x + y + 7 = 0$ (AC). Escribir la ecuación de la altura del triángulo bajada al lado AC.

Resolución. **La altura pertenece al haz**

$$x + 2y + 5 + \lambda (3x + y + 1) = 0, \quad \text{o sea,}$$

$$(1 + 3\lambda)\, x + (2 + \lambda)\, y + (5 + \lambda) = 0.$$

El coeficiente angular de la recta del haz es igual a $-(1 + 3\lambda)/(2 + \lambda)$; puesto que el coeficiente angular de la recta AC vale -1, entonces el coeficiente angular de la altura buscada es igual a 1 y para determinar λ obtenemos la ecuación $-(1 + 3\lambda)/(2 + \lambda) = 1$. De aquí $1 + 3\lambda + 2 + \lambda = 0$, o sea, $\lambda = -3/4$. Sustituyendo el valor hallado de λ en la ecuación del haz, obtendremos la ecuación buscada de la altura:

$$\left(1-\frac{9}{4}\right) x+\left(2-\frac{3}{4}\right) y+\left(5-\frac{3}{4}\right)=0, \quad \text{o sea,} \quad 5x-5y-17=0.$$

99. Se dan los vértices del triángulo ABC: A (0; 2), B (7; 3) y C (1; 6). Determinar $\widehat{BAC} = \alpha$.

100. Se dan los lados del triángulo: $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 14 = 0$ y $5x - 3y - 14 = 0$. Escribir las ecuaciones de sus alturas.

101. Escribir las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $3x + 4y - 20 = 0$ y $8x + 6y - 5=0$.

102. Se dan los vértices del triángulo: A (0; 0), B (—1; —3) y C (—5; —1). Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo y son paralelas a sus lados.

103. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto M (2; 7) y forman con la recta AB, donde A (—1; 7) y B (8; —2), los ángulos de 45°.

104. Determinar la distancia del punto M (2; —1) a la recta que corta en los ejes de las coordenadas los segmentos $a = 8$, $b = 6$.

105. En el triángulo que tiene por vértices los puntos A (3/2; 1), B (1; 5/3) y C (3; 3) hallar la longitud de la altura trazada por el vértice C.

106. ¿Para qué valor de m las rectas $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ y $mx + my - 8 = 0$ se intersecan en un mismo punto?

107. Se dan los puntos medios de los lados del triángulo: A_1 (—1; —1), B_1 (1; 9) y C (9; 1). Escribir las ecuaciones de las perpendiculares medianas bajadas a los lados del triángulo.

108. Hallar el ángulo agudo formado por la recta que pasa por los puntos A (2; $\sqrt{3}$) y B (3; $2\sqrt{3}$) con el eje de las ordenadas.

109. Los puntos A (1; 2) y C (3; 6) son los vértices opuestos de un cuadrado. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

110. Hallar sobre el eje de abscisas un punto cuya distancia *a la recta $8x + 15y + 10 = 0$ sea igual a 1.*

111. Se dan los vértices de un triángulo: A (1; 1), B (4; 5) y C (13; —4). Escribir la ecuación de la mediana trazada por el vértice B y de la altura bajada del vértice C. Calcular el área del triángulo.

112. Hallar las rectas que pertenecen al haz $2x + 3y + 6 + \lambda (x - 5y - 6) = 0$ y son perpendiculares a las rectas básicas del haz.

113. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ y por el punto $M(-4/5; 1)$.

114. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ y es paralela a la recta $5x + 8y = 0$.

115. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$, y es paralela al eje de abscisas.

116. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ y por el origen de las coordenadas.

117. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ y forma el ángulo de $135°$ con el eje de las abscisas.

118. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $M(a; b)$ y forman con la recta $x + y + c = 0$ un ángulo de $45°$.

119. Se dan los lados del triángulo: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). Escribir las ecuaciones de la mediana que pasa por el vértice B y de la altura que pasa por el vértice A.

120. Mostrar que el triángulo cuyos lados son $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ y $x - y - 10 = 0$ es isósceles. Hallar el ángulo de su vértice.

121. Se dan los vértices sucesivos de un paralelogramo: $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$. Hallar el ángulo comprendido entre sus diagonales y mostrar que este paralelogramo es un rectángulo.

122. Se dan los lados de un triángulo: $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x + y - 2 = 0$ (AC). Escribir la ecuación de la recta que pasa por el vértice B y por el punto que está sobre el lado AC y divide este último (contando a partir del vértice A) en la razón 1:3.

123. Mostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1; 1)$, $B(2; 1 + \sqrt{3})$, $C(3; 1)$ es isósceles, y calcular su área.

124. Mostrar que un triángulo cuyos lados se definen por las ecuaciones con coeficientes enteros no puede ser equilátero.

125. Se da un vértice de un triángulo $A(3; 9)$ y las ecuaciones de las medianas: $y - 6 = 0$ y $3x - 4y + 9 = 0$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

126. Escribir la ecuación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que pasa por el punto $M(2; 3)$ si los catetos del mismo se hallan situados sobre los ejes de las coordenadas y el área del triángulo es igual a 12 unidades cuadradas.

127. Escribir las ecuaciones de tres lados de un cuadrado si es conocido que de cuarto lado sirve el segmento de la recta $4x + 3y - 12 = 0$, cuyos extremos coinciden con los ejes de las coordenadas.

§ 3. Curvas de segundo orden

1. Circunferencia. *La circunferencia* es un conjunto de puntos equidistantes *del punto dado (centro). Si r es su radio y el punto C $(a;\ b)$ su centro, la ecuación* de la circunferencia tiene la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

En particular, si el centro de una circunferencia coincide con el origen de las coordenadas, la última ecuación tendrá el aspecto

$$x^2+y^2=r^2.$$

Si en el primer miembro de la ecuación (1) se suprimen los paréntesis, se obtendrá la ecuación que tiene la forma

$$x^2+y^2+lx+my+n=0, \tag{2}$$

donde $l=-2a$, $m=-2b$, $n=a^2+b^2-r^2$.

En el caso general la ecuación (2) define la circunferencia si $l^2+m^2-4n>0$.

Si $l^2+m^2-4n=0$, la ecuación indicada define el punto $(-l/2;\ -m/2)$ y si $l^2+m^2-4n<0$, ella carece de sentido geométrico. En este caso se dice que la ecuación define una circunferencia imaginaria.

Es útil recordar que la ecuación de una circunferencia contiene los términos de mayor grado x^2 e y^2 con coeficientes iguales y en ella está ausente el término con el producto de x por y.

La situación recíproca del punto M $(x_1;\ y_1)$ y de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ se determina por las condiciones siguientes: si $x_1^2+y_1^2=r^2$, el punto M pertenece a la circunferencia; si $x_1^2+y_1^2>r^2$, el punto M está fuera de la misma, y si $x_1^2+y_1^2<r^2$, el punto M está dentro de la circunferencia.

128. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

Resolución. Dividiendo la ecuación por 2 y agrupando los términos de la misma obtendremos $x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2$. Completamos los cuadrados de las expresiones x^2-4x e $y^2+\frac{5}{2}y$ sumando al primer binomio 4 y al segundo $(5/4)^2$ (simultáneamente al segundo miembro se adiciona la suma de estos números):

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16}, \quad \text{o bien,}$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

De este modo, las coordenadas del centro son $a=2$, $b=-5/4$ y el radio de la circunferencia es $r=11/4$.

129. Escribir la ecuación de la circunferencia que circunscribe al triángulo cuyos lados están definidos por las ecuaciones $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los vértices del triángulo resolviendo conjuntamente tres sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases}9x-2y-41=0,\\7x+4y+7=0;\end{cases}\quad \begin{cases}9x-2y-41=0,\\x-3y+1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}7x+4y+7=0,\\x-3y+1=0,\end{cases}$$

Como resultado obtendremos A $(3;\ -7)$, B $(5;\ 2)$, C $(-1;\ 0)$.

Supongamos que la ecuación buscada de la circunferencia tiene la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Para hallar a, b y r escribimos tres igualdades, sustituyendo las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación buscada en lugar de las coordenadas corrientes, así:

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2;\quad (5-a)^2+(2-b)^2=r^2;$$
$$(-1-a)^2+b^2=r^2.$$

Eliminando r^2, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2,\\(3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2,\end{cases}\text{ o bien }\begin{cases}4a+18b=-29,\\8a-14b=57.\end{cases}$$

De aquí $a=3{,}1$, $b=-2{,}3$. El valor de r^2 se encuentra de la ecuación $(-1-a)^2+b^2=r^2$, o sea, $r^2=22{,}1$. Por lo tanto, la ecuación buscada se escribe de la forma

$$(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1.$$

130. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (5; 0) y B (1; 4) si su centro pertenece a la recta $x+y-3=0$.

Resolución. Hallemos las coordenadas de M, punto medio de la cuerda AB; tenemos $x_M=(5+1)/2=3$, $y_M=(4+0)/2=2$, o sea, M (3; 2). El centro de la circunferencia está en la mitad de la perpendicular al segmento $[AB]$. La ecuación de la recta (AB) tiene la forma

$$(y-0)/(4-0)=(x-5)/(1-5),\quad \text{o sea,}\quad x+y-5=0.$$

Como el coeficiente angular de esta recta es -1, el coeficiente angular de la perpendicular bajada a ella es igual a 1 y la ecuación de esta perpendicular

$$y-2=1\cdot(x-3),\quad \text{es decir,}\quad x-y-1=0.$$

Es evidente que el centro de la circunferencia C es el punto de intersección de la recta (AB) con la perpendicular indicada, o sea, las coordenadas del centro se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones $x+y-5=0$, $x-y-1=0$. Por lo tanto, $x=2$, $y=1$, o sea, C (2; 1). El radio de la circunferencia es igual a la longitud del segmento $[CA]$, es decir, $r=\sqrt{5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$. De modo que la ecuación buscada tiene la forma

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10.$$

131. Escribir la ecuación de la cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=49$, que se divide por la mitad en el punto A (1; 2).

Resolución. Planteamos la ecuación del diámetro de la circunferencia, el cual pasa por el punto A (1; 2). Esta ecuación tiene la forma $y=2x$. La cuerda buscada es perpendicular al diámetro y pasa por el punto A, o sea, su ecuación es

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),\ \text{o bien,}\ x+2y-5=0.$$

132. Hallar la ecuación de una circunferencia simétrica a la circunferencia $x^2+y^2=2x+4y-4$ con respecto a la recta $x-y-3=0$.

Resolución. Reducimos la ecuación de la circunferencia dada a la forma canónica $(x-1)^2+(y-3)^2=1$; el centro de la circunferencia está en el punto C (1; 2) y su radio es igual a 1. Hallamos las coordenadas del centro C_1 $(x_1; y_1)$ de la circunferencia simétrica, para lo cual trazamos por el punto C (1; 2) una recta perpendicular a la recta $x-y-3=0$. Su ecuación es $y-2=$

$= k(x-1)$, donde $k = -1/1 = -1$, de donde

$$y - 2 = -x + 1, \quad \text{o bien,} \quad x + y - 3 = 0.$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $x - y - 3 = 0$ y $x + y - 3 = 0$, obtendremos $x = 3$, $y = 0$, o sea, la proyección del punto C (1; 2) sobre la recta dada es el punto P (3; 0). Las coordenadas del punto simétrico se obtienen por las fórmulas de las coordenadas del punto medio del segmento: $3 = (1 + x_1)/2$, $0 = (2 + y_1)/2$; de este modo, $x_1 = 5$, $y_1 = -2$. Por consiguiente, el punto C_1 (5; -2) es el centro de la circunferencia simétrica y la ecuación de esta circunferencia tiene la forma

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1.$$

133. Hallar el conjunto de los puntos medios de la cuerdas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4(y + 1)$, que pasan por el origen de las coordenadas.

Resolución. La ecuación del conjunto de las cuerdas tiene la forma $y = kx$. Expresamos con k las coordenadas del punto de intersección de las cuerdas con la circunferencia, para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones $y = kx$ y $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$. Obtenemos la ecuación cuadrática $x^2(k^2 + 1) - 4kx - 4 = 0$. Aquí $x_1 + x_2 = 4k/(1 + k^2)$. Pero la semisuma de estas abscisas da la abscisa del punto medio de la cuerda, o sea, $x = 2k/(1 + k^2)$ y la ordenada del punto medio de la cuerda $y = 2k^2/(1 + k^2)$. Las dos últimas igualdades son las ecuaciones paramétricas del conjunto buscado de los puntos.

Eliminando k de estas igualdades (para lo cual es suficiente hacer $k = y/x$ en la relación $x = 2k/(1 + k^2)$) obtenemos $x^2 + y^2 - 2y = 0$. De esta manera, el conjunto buscado es también una circunferencia.

134. Determinar las coordenadas de los centros y de los radios de las circunferencias: 1) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$.

135. Hallar el ángulo comprendido entre los radios de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, trazados en el punto de su intersección con el eje Oy.

136. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (1; 2), B (0; -1) y C (-3; 0).

137. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (7; 7) y B (-2; 4) si su centro está sobre la recta $2x - y - 2 = 0$.

138. Escribir la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 = 16$ y $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

139. Escribir las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, trazadas en los puntos de intersección de la circunferencia con la recta $x - y + 2 = 0$.

140. Se da la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Desde el punto A (-2; 0) se traza la cuerda AB, a una distancia $|BM| = |AB|$. Hallar el conjunto de los puntos M.

2. Elipse. Se llama *elipse* al conjunto de los puntos, cuyas distancias sumadas a dos puntos dados, denominados *focos*, es una magnitud constante (designada por $2a$); además, esta constante es mayor que la distancia entre los focos.

Si los ejes de coordenadas están situados con respecto a la elipse de modo indicado en la fig. 10 y los focos de la elipse se encuentran sobre el eje Ox, en los puntos F_1 (c; 0) y F_2 ($-c$; 0) equidistantes del origen de las coordenadas, entonces se obtiene la ***ecuación elemental*** *(canónica) de la elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Aquí a es el semieje mayor de la elipse y b, el semieje menor; con ello a, b y c (c es la mitad de la distancia entre los focos) están ligados por la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

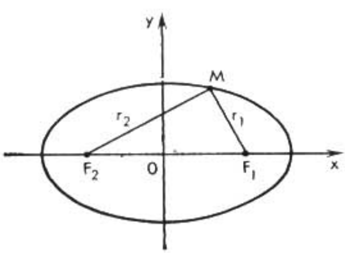


Fig. 10

La forma de una elipse (medida de su contracción) se caracteriza por su *excentricidad* $e = c/a$ (puesto que $c < a$, entonces $e < 1$).

Las distancias de cierto punto de la elipse M a sus focos se llaman *radios vectores focales* de este punto. Ellos suelen designarse por r_1 y r_2 (en virtud de la definición de la elipse para todo punto suyo $r_1 + r_2 = 2a$).

En el caso particular cuando $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, los dos focos coinciden en un mismo punto, en el centro), la elipse se convierte en circunferencia (con la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$).

La situación recíproca del punto $M(x_1;\ y_1)$ y de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se determina por las siguientes condiciones: si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, el punto M pertenece a la elipse; si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, el punto M se encuentra fuera de la elipse; si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, el punto M se halla dentro de la elipse.

Los radios vectores focales se expresan por la abscisa del punto de la elipse por las fórmulas $r_1 = a - ex$ (radio vector focal derecho) y $r_2 = a + ex$ (radio vector focal izquierdo).

141. Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por los puntos $M(5/2;\ \sqrt{6}/4)$ y $N(-2;\ \sqrt{15}/5)$.

Resolución. Sea $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ la ecuación buscada de la elipse. Las coordenadas de los puntos dados deben satisfacer esta ecuación. Por consiguiente,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1, \qquad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

De aquí hallamos $a^2 = 10$, $b^2 = 1$. Así que la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$

142. Sobre la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ hallar el punto cuya diferencia de los radios vectores focales es igual a 6,4.

143. Hallar la longitud de la perpendicular levantada desde el foco de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ al eje mayor hasta intersecarse con la elipse.

144. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el foco izquierdo y el vértice inferior de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

145. Una elipse relacionada con los ejes pasa por el punto M (1; 1) y tiene una excentricidad $e = 3/5$. Escribir su ecuación.

146. ¿Cómo se sitúan con respecto a la elipse $x^2/50 + y^2/32 = 1$ los puntos M (7; 1), N (—5; —4), P (4; 5)?

147. Hallar la excentricidad de una elipse si el segmento focal se ve desde el vértice superior bajo un ángulo α.

148. Hallar sobre la recta $x + 5 = 0$ un punto que sea equidistante del foco izquierdo y del vértice superior de la elipse $x^2/20 + y^2/4 = 1$.

149. Valiéndose de la definición de elipse, escribir su ecuación si se sabe que los puntos F_1 (0; 0) y F_2 (1; 1) son los focos de la elipse y la longitud del eje mayor es igual a 2.

150. Escribir la ecuación del conjunto de los puntos cuyas distancias al punto A (0; 1) son dos veces menor que la distancia a la recta $y - 4 = 0$.

151. Los extremos de un segmento AB de longitud constante a se deslizan por los lados de un ángulo recto. Hallar la ecuación de una curva que sea descrita por el punto M que divide este segmento en la razón 1 : 2.

3. Hipérbola. Se llama *hipérbola* al conjunto de los puntos en los que el valor absoluto de sus distancias a dos puntos dados, denominados *focos*, es una constante (designada por $2a$); además, esta constante es menor que la distancia entre los focos. Si los focos se sitúan en los puntos F_1 (c; 0) y F_2 ($-c$;0), se obtiene la *ecuación canónica de la hipérbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. La hipérbola consta de dos ramas y está situada simétricamente con respecto a los ejes de las coordenadas. Los puntos A_1 (a; 0) y A_2 ($-a$; 0) se llaman *vértices* de la hipérbola. El segmento $|A_1A_2| = 2a$ recibe el nombre de *eje real* de la hipérbola y el segmento $|B_1B_2| = 2b$ se denomina *eje imaginario* (fig. 11).

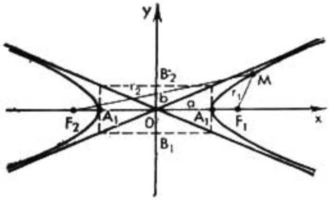


Fig. 11

Una recta se llama *asíntota* a la hipérbola si la distancia de un punto M (x; y) de la hipérbola a esta recta tiende a cero para $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$. La hipérbola tiene dos asíntotas cuyas ecuaciones son $y = \pm(b/a)\,x$.

Para trazar las asíntotas de una hipérbola se construye el rectángulo axial de la misma con los lados $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Las rectas que pasan por los vértices opuestos de este rectángulo son las asíntotas de la hipérbola. En la fig. 11 se muestra la situación recíproca de la hipérbola y sus asíntotas. La relación $e = c/a > 1$ se denomina *excentricidad de la hipérbola*.

Los radios vectores focales de la rama derecha de la hipérbola: $r_1 = ex - a$ (radio vector focal derecho), $r_2 = ex + a$ (radio vector focal izquierdo).

Los radios vectores focales de la rama izquierda de la hipérbola: $r_1 = -ex + a$ (radio vector focal derecho), $r_2 = -ex - a$ (radio vector focal izquierdo).

Si $a = b$, la ecuación de la hipérbola toma la forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Esa hipérbola se llama *equilátera*. Sus asíntotas forman un ángulo recto. Si como ejes de las coordenadas se toman las asíntotas de una hipérbola equilátera, su ecuación toma el aspecto $xy = m$ ($m = \pm a^2/2$; cuando $m > 0$ la hipérbola está situada en los cuadrantes I y III y cuando $m < 0$, en los cuadrantes II y IV). Como la ecuación $xy = m$ se puede escribir de la forma $y = m/x$, la hipérbola equilátera es el gráfico de dependencia inversamente proporcional entre las magnitudes x e y.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\left(\text{ó } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right) \tag{2}$$

es también la ecuación de una hipérbola, pero de eje real de la misma sirve el segmento del eje Oy de longitud igual a $2b$.

Dos hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ tienen los mismos semiejes y las mismas asíntotas, pero el eje real de una de ellas sirve de eje imaginario de la otra y viceversa. Tales hipérbolas se denominan *conjugadas*.

152. Sobre la rama derecha de la hipérbola $x^2/16 - y^2/9 = 1$ hallar el punto cuya distancia al foco derecho es dos veces menor que su distancia al foco izquierdo.

Resolución. Para la rama derecha de la hipérbola los radios vectores focales se determinan por las fórmulas $r_1 = ex - a$ y $r_2 = ex + a$. Por consiguiente, tenemos la ecuación $ex + a = 2(ex - a)$ de donde $x = 3a/e$; aquí $a = 4$, $e = c/a = \sqrt{a^2+b^2}/a = \sqrt{16+9}/4 = 5/4$, o sea, $x = 9{,}6$.

Hallamos la ordenada valiéndonos de la ecuación de la hipérbola:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Ahora bien, al enunciado del problema lo satisfacen dos puntos: $M_1\,(9{,}6;\ 0{,}6\sqrt{119})$ y $M_2\,(9{,}6;\ -0{,}6\sqrt{119})$.

153. Se dan los puntos $A\,(-1;\ 0)$ y $B\,(2;\ 0)$. El punto M se mueve de modo que en el triángulo AMB el ángulo $\hat{B}$ permanece dos veces mayor que el ángulo $\hat{A}$. Hallar la ecuación de la curva que describe el punto M.

Resolución. Tomando el punto M con las coordenadas x e y, expresamos a las $\operatorname{tg}\hat{B}$ y $\operatorname{tg}\hat{A}$ por las coordenadas de los puntos A, B y M:

$$\operatorname{tg}\hat{B}=-\frac{y}{x-2}=\frac{y}{2-x},\quad \operatorname{tg}\hat{A}=\frac{y}{x+1}.$$

Según el enunciado, obtenemos la ecuación $\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg} 2\hat{A}$, o sea, $\operatorname{tg}\hat{B} = 2\operatorname{tg}\hat{A}/(1-\operatorname{tg}^2\hat{A})$. Sustituyendo en esta igualdad las expresiones halladas para $\operatorname{tg}\hat{B}$ y $\operatorname{tg}\hat{A}$, llegamos a la ecuación

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2};$$

después de dividir por y ($y \neq 0$) y simplificar, obtenemos $x^2 - y^2/3 = 1$. La curva buscada es una hipérbola.

154. La excentricidad de una hipérbola es igual a $\sqrt{2}$. Escribir la ecuación elemental de la hipérbola que pasa por el punto $M\,(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$.

Resolución. Según la definición de la excentricidad tenemos $c/a = \sqrt{2}$, o bien $c^2 = 2a^2$. Pero $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto, $a^2 + b^2 = 2a^2$, o bien, $a^2 = b^2$, es decir, la hipérbola es equilátera.

La otra igualdad la obtenemos a partir de los datos que indican la posición del punto M en la hipérbola, o sea, $(\sqrt{3})^2/a^2 - (\sqrt{2})^2/b^2 = 1$, o bien $3/a^2 - 2/b^2 = 1$. Puesto que $a^2 = b$, obtenemos $3/a^2 - 2/a^2 = 1$, o sea, $a^2 = 1$.

De suerte que la ecuación de la hipérbola buscada tiene la forma $x^2 - y^2 = 1$.

155. Escribir la ecuación de una hipérbola que pasa por el punto M (9; 8) si las asíntotas de la hipérbola tienen las ecuaciones $y = \pm (2 \sqrt{2/3})\, x$.

156. Hallar la ecuación de una hipérbola, cuyos vértices y focos se encuentran en los respectivos focos y vértices de la elipse $x^2/8 + y^2/5 = 1$.

157. Por el punto M (0; -1) y el vértice derecho de la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$ pasa una recta. Hallar el segundo punto de intersección de la recta con la hipérbola.

158. Se da la hipérbola $x^2 - y^2 = 8$. Hallar la elipse cofocal que pasa por el punto M (4; 6).

159. Se da la elipse $9x^2 + 25y^2 = 1$. Escribir la ecuación de la hipérbola equilátera cofocal.

160. El ángulo comprendido entre las asíntotas de una hipérbola es igual a 60°. Calcular la excentricidad de la hipérbola.

161. Sobre la rama izquierda de la hipérbola $x^2/64 - y^2/36 = 1$ hallar un punto cuyo radio vector focal derecho sea igual a 18.

162. Escribir la ecuación de la hipérbola cuya excentricidad es igual a 2 y los focos coinciden con los focos de la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

163. Hallar los radios vectores focales de la hipérbola $x^2/16 - y^2/9 = 1$, en los puntos de intersección de esta última con la circunferencia $x^2 + y^2 = 91$.

164. Demostrar que la longitud de la perpendicular bajada del foco a una de las asíntotas de una hipérbola es igual al semieje imaginario.

165. Demostrar que el producto de las distancias de todo punto de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ a sus asíntotas es una constante.

166. Hallar la ecuación del conjunto de los puntos equidistantes a la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 = 0$ y al punto M (2; 0).

4. Parábola. Se llama *parábola* al conjunto de los puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta dada que ha recibido el nombre de *directriz*. Si la directriz de una parábola es la recta $x = -p/2$ y su foco es el punto F ($p/2$; 0), entonces la ecuación de la parábola tiene la forma

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Esta parábola está situada simétricamente con respecto al eje de las abscisas (fig. 12, donde $p > 0$).

La expresión

$$x^2 = 2py \tag{2}$$

es la ecuación de una parábola simétrica con respecto al eje de las ordenadas. Si $p > 0$, las parábolas (1) y (2) están vueltas hacia el sentido positivo del respectivo eje y si $p < 0$, hacia el negativo.

La longitud del radio vector focal de la parábola $y^2 = 2px$ se determina por las fórmulas $r = x + p/2$ $(p > 0)$.

167. Escribir la ecuación de una parábola simétrica al eje Ox, con el vértice en el origen de coordenadas, si la longitud de cierta cuerda de esta parábola, perpendicular al eje Ox, es igual a 16 y la distancia de esta cuerda al vértice es 6.

Resolución. Como son dadas la longitud de la cuerda y su distancia al vértice, entonces se conocen las coordenadas del extremo de esta cuerda, o sea, del punto M que pertenece a la parábola. La ecuación de la parábola tiene la forma $y^2 = 2px$; suponiendo que en esta ecuación $x = 6$, $y = 8$, hallamos $8^2 = 2p \cdot 6$, de donde $2p = 32/3$. De suerte que la ecuación de la parábola buscada es $y^2 = 32x/3$.

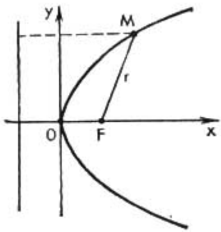


Fig. 12

168. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de las coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Oy y corte sobre la bisectriz de los ángulos de las coordenadas I y III una cuerda de $8\sqrt{2}$ de longitud.

Resolución. La ecuación buscada de la parábola es $x^2 = 2py$, la ecuación de la bisectriz es $y = x$. De este modo, obtenemos los puntos de intersección de la parábola con la bisectriz: O (0; 0) y M $(2p; 2p)$. La longitud de la cuerda se determina como distancia entre dos puntos: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, de donde $2p = 8$. Por consiguiente, la ecuación buscada tiene la forma $x^2 = 8y$.

169. Escribir la ecuación elemental de una parábola si se conoce que su foco se encuentra en el punto de intersección de la recta $4x - 3y - 4 = 0$ con el eje Ox.

170. Hallar en la parábola $y^2 = 8x$ un punto cuya distancia a la directriz sea igual a 4.

171. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Ox y corte sobre la recta $y = x$ una cuerda de longitud igual a $4\sqrt{2}$.

172. La parábola $y^2 = 2x$ corta sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas una cuerda cuya longitud es igual a 3/4. Escribir la ecuación de esta recta.

173. Escribir la ecuación elemental de una parábola si la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje de simetría y divide por la mitad la distancia comprendida entre el foco y el vértice, es igual a 1.

174. Hallar sobre la parábola $y^2 = 32x$ un punto cuya distancia a la recta $4x + 3y + 10 = 0$ sea igual a 2.

175. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Ox y pase por el punto M (4; 2); determinar el ángulo α comprendido entre el radio vector focal de este punto y el eje Ox.

§ 4. Transformación de coordenadas y simplificación de ecuaciones de las curvas de segundo orden

1. Transformación de coordenadas. Al pasar de un sistema de coordenadas xOy a un sistema nuevo $x'O_1y'$ (el sentido de los ejes de coordenadas es el anterior y como nuevo punto de origen de las coordenadas se toma O_1 $(a;\ b)$; fig. 13) la relación existente entre las viejas y nuevas coordenadas de cierto punto M del plano se determina por las fórmulas siguientes:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b; \tag{1}$$

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{2}$$

Con ayuda de las fórmulas (1) las viejas coordenadas se expresan en función de las nuevas y con ayuda de las fórmulas (2), las nuevas coordenadas se expresan mediante las viejas.

Al girar los ejes de las coordenadas en un ángulo α (el origen es el anterior, además α se lee en el sentido contrario al de las agujas del reloj; fig. 14) la

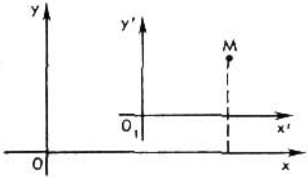


Fig. 13

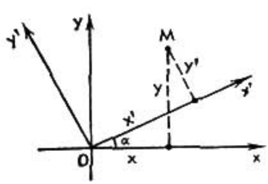


Fig. 14

dependencia entre las viejas coordenadas x, y y las nuevas x', y', se determina por las fórmulas siguientes:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha, \qquad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha; \tag{3}$$

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha, \qquad y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha. \tag{4}$$

176. Se ha efectuado un traslado paralelo de los ejes de las coordenadas, con ello el nuevo origen de las coordenadas se encuentra en el punto O_1 $(3;\ -4)$. Se conocen las viejas coordenadas del punto M $(7;\ 8)$. Determinar las nuevas coordenadas de este mismo punto.

Resolución. Aquí $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$. Por las fórmulas (2) hallamos $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$.

177. *Sobre un plano xOy se da el punto M $(4;\ 3)$. El sistema de* coordenadas se gira alrededor del origen de las coordenadas de modo que el nuevo eje pase por el punto M. Determinar las viejas coordenadas del punto A, si se conocen sus nuevas coordenadas $x' = 5$, $y' = 5$.

Resolución. Como $|OM| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, entonces $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$, $\cos \alpha = 4/5$; en este caso las fórmulas (3) de transformación de las coordenadas para el problema en cuestión tomarán la forma

$$x = (4/5)\, x' - (3/5)\, y', \qquad y = (3/5)\, x' + (4/5)\, y'.$$

Suponiendo $x' = y' = 5$, hallamos $x = 1$, $y = 7$.

178. El sistema de coordenadas se ha girado en un ángulo $\alpha = \pi/6$. Determinar las nuevas coordenadas del punto $M\ (\sqrt{3};\ 3)$.

Resolución. Usando las fórmulas (4), obtenemos

$$x' = \sqrt{3} \cos (\pi/6) + 3 \operatorname{sen} (\pi/6) = 3/2 + 3/2 = 3,$$

$$y' = -\sqrt{3} \operatorname{sen} (\pi/6) + 3 \cos (\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}.$$

179. Se da el punto $M\ (9/2;\ 11/2)$. Como nuevos ejes de las coordenadas se toman las rectas $2x - 1 = 0$ (eje O_1y'), $2y - 5 = 0$ (eje O_1x'). Hallar las coordenadas del punto M en el nuevo sistema de coordenadas.

180. Se da el punto $M\ (4\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$. Como nuevo eje de las abscisas se toma la recta $y = 2x$ y como nuevo eje de las ordenadas, la recta $y = -0{,}5x$, además los nuevos ejes de las coordenadas forman ángulos agudos con los ejes viejos correspondientes. Hallar las coordenadas del punto M en el nuevo sistema.

2. Parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ e hipérbola $y = (kx + l)/(px + q)$. La ecuación que tiene la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

debido a la transformación de las coordenadas con el traslado paralelo de los ejes, o sea, por las fórmulas $x = x' + a$, $y = y' + b$ (a y b son las coordenadas del nuevo origen, x' e y' son las nuevas coordenadas), se reduce a la forma canónica de la ecuación de la parábola.

La parábola definida por la ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$ tiene el eje de simetría paralelo al eje Oy (análogamente, la ecuación $x = Ay^2 + By + C$ define una parábola con el eje de simetría paralelo al eje Ox).

La función lineal fraccional

$$y = (kx + l)/(px + q)$$

determina una hipérbola equilátera si $kq - pl \neq 0$, $p \neq 0$; transformando las coordenadas con la traslación paralela de los ejes de coordenadas, esta ecuación se reduce a la forma cánonica de una hipérbola equilátera $xy = m$, o sea, a la ecuación de una hipérbola equilátera en la cual los ejes de coordenadas son asíntotas. Cuando $m > 0$ las ramas de la hipérbola están en los cuadrantes I y III y cuando $m < 0$, en los cuadrantes II y IV.

181. Reducir a la forma canónica la ecuación de la parábola $y = 9x^2 - 6x + 2$.

Resolución. Sustituimos x por $x' + a$ e y por $y' + b$:

$$y' + b = 9\,(x' + a)^2 - 6\,(x' + a) + 2, \quad \text{o bien,} \quad y' = 9x'^2 + 6x'\,(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b).$$

Hallamos tales valores de a y b con los que el coeficiente de x' y el término independiente se anulen: $3a - 1 = 0$; $9a^2 - 6a + 2 - b = 0$, o sea, $a = 1/3$, $b = 1$. Por consiguiente, la ecuación canónica de la parábola tiene la forma $x'^2 = (1/9)\, y'$. El vértice de la parábola está en el punto $O_1\ (1/3;\ 1)$ y $p = 1/18$.

Otro procedimiento de resolución de tales problemas consiste en que la ecuación dada que tiene la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ (o bien $x = Ay^2 + By +$

$+ C)$ se reduce a la forma $(x-a)^2 = 2p(y-b)$ [$(y-b)^2 = 2p(x-a)$, respectivamente]. Entonces el punto O_1 $(a;\ b)$ sirve de vértice de la parábola y el signo del parámetro p determinará en qué sentido, positivo o negativo, del eje respectivo (Oy ó Ox) quede orientada la parábola.

Así, la ecuación $y = 9x^2 - 6x + 2$ se transforma del modo siguiente:

$$y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 1; \quad y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2; \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y-1).$$

De aquí volvemos a obtener que el vértice de la parábola está en el punto O_1 (1/3; 1), que el parámetro $p = 1/18$, y que la rama de la parábola queda orientada en el sentido positivo del eje Oy.

182. Reducir la ecuación de la hipérbola $y = (4x+5)/(2x-1)$ a la forma $x'y' = k$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con respecto al sistema inicial de coordenadas.

Resolución. Mediante una traslación paralela de los ejes de coordenadas transformamos la ecuación dada en otra que tiene la forma

$$(y' + b)(2x' + 2a - 1) = 4x' + 4a + 5,$$

o bien,

$$2x'y' + (2b-4)x' + (2a-1)y' = 4a + b - 2ab + 5.$$

Hallemos a y b de las condiciones $2b - 4 = 0$ y $2a - 1 = 0$, o sea, $a = 0{,}5$, $b = 2$. Entonces la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas tendrá el aspecto $x'y' = 3{,}5$. De asíntotas de la hipérbola sirven los nuevos ejes de las coordenadas y por eso sus ecuaciones son: $x' = 0{,}5$, $y' = 2$.

Otro procedimiento de resolución de tales problemas consiste en que la ecuación $y = (kx+l)/(px+q)$ se reduce a la forma $(x-a)(y-b) = m$; el centro de la hipérbola está en el punto O_1 $(a;\ b)$; de asíntotas de la misma sirven las rectas $x = a$ e $y = b$, el signo m determina, como antes, en que ángulos entre las asíntotas se encuentran las ramas de la hipérbola.

Así, la ecuación $y = (4x+5)/(2x-1)$ se transforma del modo siguiente:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)y - 4\left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\right) = 0; \quad (2x-1)y - (4x+5) = 0;$$

$$2(x - 0{,}5)(y - 2) = 7.$$

De suerte que la ecuación de la hipérbola se ha reducido a la forma $(x - 0{,}5)(y - 2) = 3{,}5$; el centro de la hipérbola se encuentra en el punto O_1 (0,5; 2), las ramas de la misma están situadas en los cuadrantes I y III entre sus asíntotas $x - 0{,}5 = 0$, $y - 2 = 0$.

183. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las parábolas: 1) $y = 4x - 2x^2$; 2) $y = -x^2 + 2x + 2$; 3) $x = -4y^2 + y$; 4) $x = y^2 + 4y + 5$.

184. Reducir a la forma $x'y' = m$ las ecuaciones de las hipérbolas: 1) $y = 2x/(4x-1)$; 2) $y = (2x+3)/(3x-2)$; 3) $y = (10x+2)/(5x+4)$; 4) $y = (4x+3)/(2x+1)$.

3. Ecuación de cinco términos de una curva de segundo orden. La ecuación de segundo grado que tiene la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(no contiene el término xy con el producto de las coordenadas) se llama *ecuación de cinco términos de una curva de segundo orden*. Esta ecuación determina sobre un plano xOy una elipse, hipérbola o parábola (con casos posibles de descomposición y degeneración de estas curvas) que tienen los ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, según el signo del producto de los coeficientes A y C.

1. Sea $AC > 0$; entonces la curva definida por esta ecuación es una elipse.

(real, imaginaria o degenerada en punto); cuando $A = C$ la elipse se convierte en circunferencia.

2. Sea $AC < 0$; entonces la curva respectiva es una hipérbola que puede degenerarse en dos rectas intersecadas si el primer miembro de la ecuación se descompone en producto de dos factores lineales;

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Sea $AC = 0$ (es decir, bien sea $A = 0$, $C \neq 0$, bien sea $C = 0$, $A \neq 0$); entonces la ecuación determina una parábola que puede degenerar en dos rectas paralelas (reales diferentes, reales coincididas o imaginarias) si el primer miembro de la ecuación no contiene x o y (es decir si la ecuación tiene la forma $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ o bien $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

El tipo de curva y su disposición en el plano se determinan fácilmente reduciendo la ecuación a la forma $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (en caso de $AC > 0$ ó $AC < 0$); por la forma de la ecuación obtenida se revelan también los casos de descomposición o degeneración de la elipse y la hipérbola.

Si las curvas no están degeneradas, entonces, trasladando el origen de las coordenadas al punto $O_1(x_0; y_0)$, la ecuación obtenida de la elipse o la hipérbola se puede reducir a la forma canónica.

El caso en que $AC = 0$ ha sido examinado detalladamente en el párrafo precedente, puesto que la ecuación de una parábola no degenerada se puede escribir aquí en forma de $y = a_1x^2 + b_1x + c$, o bien, $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$.

185. ¿Qué línea define la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$?

Resolución. Transformemos la ecuación dada del modo siguiente:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4; \quad 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = -4 + 4 + 36; \quad 4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Efectuamos la traslación paralela de los ejes de las coordenadas tomando como nuevo origen de las mismas el punto $O'(1; 2)$. Aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas: $x = x' + 1$, $y = y' + 2$. Con respecto a los nuevos ejes, la ecuación de la curva tomará la forma

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36, \text{ o bien, } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Así, pues, la curva definida es una elipse.

186. ¿Qué línea define la ecuación $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

Resolución. Transformamos la ecuación dada así:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 44;$$

$$(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 44 + 1 - 36, \quad (x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 9.$$

Efectuamos la traslación paralela de los ejes de las coordenadas tomando como nuevo origen el punto $O'(-1; 2)$. Las fórmulas de transformación de las coordenadas tienen la forma $x = x' - 1$, $y = y' + 2$. Después de transformar las coordenadas obtendremos la ecuación

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \text{ o bien, } \frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$$

La curva es una hipérbola. De asíntotas de esta hipérbola con respecto a los nuevos ejes sirven las rectas $y' = (\pm 1/3)x'$.

Determinar qué curvas se definen por las ecuaciones siguientes. Construir los dibujos.

187. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0.$
188. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0.$
189. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0.$
190. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0.$
191. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0.$
192. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0.$
193. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0.$
194. $x^2 - 6x + 8 = 0.$
195. $x^2 + 2x + 5 = 0.$

4. Reducción de la ecuación general de una curva de segundo orden a la forma canónica. Si la curva de segundo orden está definida por la ecuación

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

entonces, aplicando la transformación de un giro de los ejes de coordenadas con la utilización de las fórmulas $x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$, $y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$, conviene, seleccionada debidamente α, suprimir en la ecuación el término que contiene el producto de las coordenadas.

Las transformaciones ulteriores han sido examinadas en el apartado precedente.

El caso de descomposición de una curva de segundo orden en dos rectas se puede determinar fácilmente por la ecuación inicial procediendo del modo siguiente: examinando la ecuación como cuadrática con respecto a y (suponiendo que el coeficiente de y^2 se distingue del cero), se despeja y en la misma; con ello si el radicando es un cuadrado exacto de cierto binomio $ax + b$, la raíz se extraerá y para y se obtendrán dos valores: $y_1 = k_1x + b_1$; $y_2 = k_2x + b_2$. Esto es lo que muestra que la curva se descompone en dos rectas.

La ecuación dada también puede ser resuelta con respecto a x. Si en la ecuación general de una curva de segundo orden $A = C = 0$ (naturalmente $B \neq 0$), entonces la ecuación indicada define un par de rectas si, y sólo si, $B/D = 2E/F$. En este caso el miembro izquierdo de la ecuación se descompone en sus factores lineales.

196. Mostrar que la ecuación $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$ define un conjunto de dos rectas.

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma $(3x + 4y)^2 - 25 = 0$. Descomponiendo en factores el primer miembro, obtenemos $(3x + 4y + 5) \times \times (3x + 4y - 5) = 0$. De este modo, la ecuación dada define las rectas $3x + 4y + 5 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$.

197. Mostrar que la ecuación $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$ define un conjunto de dos rectas.

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma

$$3y^2 - 2(4x - 1)y - (3x^2 - 14x + 8) = 0.$$

Despejamos y en la ecuación:

$$y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x-1)^2 + (9x^2 - 42x + 24)}}{3}, \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{4y - 1 \pm (5x - 5)}{3}.$$

Obtenemos las ecuaciones de las rectas $y = 3x - 2$ e $y = (-x + 4)/3$. Estas ecuaciones se pueden escribir de la forma $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$.

198. ¿Qué línea se define por la ecuación $xy + 2x - 4y - 8 = 0$?

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma $x(y+2)-4(y+2)=0$, o bien, $(x-4)(y+2)=0$. De este modo la ecuación determina dos rectas $x-4=0$ e $y+2=0$ una de las cuales es paralela al eje Ox y la otra lo es al eje Oy.

199. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

Resolución. 1. Transformamos esta ecuación valiéndonos de las fórmulas (3) de giro de los ejes de las coordenadas. Tenemos

$$5(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+8(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)^2+8(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)+$$
$$+14(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)+5=0, \quad \text{o bien,}$$

$$(5\cos^2\alpha+4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+8\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2+(5\operatorname{sen}^2\alpha-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+$$
$$+8\cos^2\alpha)y'^2+[6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)]x'y'+$$
$$+(8\cos\alpha+14\operatorname{sen}\alpha)x'+(14\cos\alpha-8\operatorname{sen}\alpha)y'+5=0.$$

Hallamos α a partir de la condición $4(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)+6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0$, o sea, igualamos a cero el coeficiente de $x'y'$. Obtenemos la ecuación $2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0$. De aquí, $\operatorname{tg}\alpha_1=2$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-1/2$.

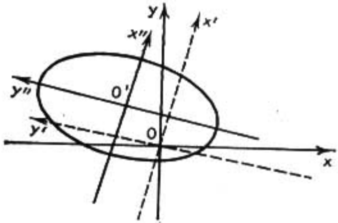


Fig. 15

Observemos que estos valores de la $\operatorname{tg}\alpha$ corresponden a dos sentidos perpendiculares recíprocamente. Por eso, tomando $\operatorname{tg}\alpha=2$ en vez de $\operatorname{tg}\alpha=-1/2$, sólo cambiamos de papel los ejes x' e y' (fig. 15).

Sea que la $\operatorname{tg}\alpha=2$, entonces $\operatorname{sen}\alpha=\pm 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{5}$; tomamos los valores positivos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Entonces la ecuación tomará el aspecto

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0,$$

o bien,

$$9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)=-5.$$

2. Completemos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5,$$

o bien,

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Tomando como nuevo origen de las coordenadas el punto O' $(-2/\sqrt{5};\ 1/(4\sqrt{5}))$, apliquemos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' - 2/\sqrt{5}$, $y' = y'' + 1/(4\sqrt{5})$; obtendremos

$$9x''^2+4y''^2=\frac{9}{4}, \quad \text{o bien,} \quad \frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1$$

(ecuación de la elipse).

200. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Resolución. 1. Trasformemos esta ecuación valiéndonos de las fórmulas (3) de giro de los ejes de coordenadas:

$$6(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + 8(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 - \\ - 12(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) - 26(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + 11 = 0,$$

o bien

$$(6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 8\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2 + (8\cos^2\alpha - 6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)y'^2 + \\ + [16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)]x'y' - \\ - (12\cos\alpha + 26\operatorname{sen}\alpha)x' - (26\cos\alpha - 12\operatorname{sen}\alpha)y' + 11 = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de $x'y'$, tenemos

$16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0$, o bien $3\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$.

De aquí $\operatorname{tg}\alpha_1 = 3$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1/3$; tomemos $\operatorname{tg}\alpha = 3$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \pm 3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$; tomemos los valores positivos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Entonces la ecuación revestirá el aspecto

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}\,x' + \sqrt{10}\,y' + 11 = 0, \text{ o bien } 9(x'^2 - \\ - \sqrt{10}x') - (y'^2 - \sqrt{10}y') = -11.$$

2. Completemos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - 11,$$

o bien

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$

Tomando como nuevo origen el punto O' $(\sqrt{10}/2;\ \sqrt{10}/2)$, aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' + \sqrt{10}/2$, $y' = y'' + \sqrt{10}/2$; obtenemos

$$9x''^2 - y''^2 = 9, \text{ o bien, } x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$$

(ecuación de la hipérbola).

201. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Resolución. 1. Transformemos la ecuación con ayuda de las fórmulas de giro de los ejes:

$$(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + (x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 10(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) - \\ - 6(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + 25 = 0,$$

o bien,

$$(\cos^2\alpha - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha)\,x'^2 + (\mathrm{sen}^2\alpha + 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)\,y'^2 + \\ + 2\,(\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\,x'y' - (10\cos\alpha + 6\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,x' + \\ + (10\,\mathrm{sen}\,\alpha - 6\cos\alpha)\,y' + 25 = 0.$$

Igualamos a cero el coeficiente del producto $x'y'$; tenemos $2\,(\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0$, de donde $\mathrm{tg}^2\,\alpha = 1$, o sea, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = -1$. Tomamos $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, de donde $\alpha = \pi/4$ y $\mathrm{sen}\,\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$. Entonces, la ecuación tomará el aspecto

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 2\sqrt{2}\,y' + 25 = 0, \text{ o bien, } 2\,(y'^2 + \sqrt{2}\,y') - 8\sqrt{2}\,x' + 25 = 0.$$

2. Completamos el cuadrado de la expresión entre paréntesis:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}\,x' - 24, \text{ o bien, } \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Tomando como nuevo origen el punto $O'\,(3/\sqrt{2};\ -\sqrt{2}/2)$, aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' - 3/\sqrt{2}$, $y' = y'' + \sqrt{2}/2$; obtendremos

$$y''^2 = 4\sqrt{2}\,x''$$

(ecuación de la parábola).

Mostrar que las ecuaciones siguientes definen las curvas que se descomponen en un par de rectas y hallar las ecuaciones de estas rectas:

202. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$.

203. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

204. $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$.

Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las curvas siguientes:

205. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.

206. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

207. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

§ 5. Determinantes de segundo y tercero órdenes y de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas

1. Determinantes de segundo orden y de un sistema de ecuaciones lineales. *Un determinante de segundo orden* correspondiente a la tabla de elementos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

si su determinante $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, tiene una solución única que se halla por las fórmulas

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{1}$$

(*fórmulas de Cramer*).

Si el determinante $D = 0$, entonces el sistema es incompatible (cuando $D_x \neq 0$ y $D_y \neq 0$), o bien es indeterminado (cuando $D_x = D_y = 0$). En este último caso el sistema se reduce a una sola ecuación (por ejemplo, a la primera), mientras que la segunda es consecuencia de la primera.

La condición de incompatibilidad de un sistema se puede escribir de la forma $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, y la condición de indeterminación de forma $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$.

Una ecuación lineal se llama *homogénea* si el término independiente de la misma es igual a cero.

Examinemos un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_1y+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

1. Si $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, entonces el sistema se reduce a una sola ecuación (por ejemplo, a la primera) en la cual una de las incógnitas se expresa por otras dos cuyos valores resultan arbitrarios.

2. Si la condición $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ no se cumple, las soluciones del sistema se hallan por las fórmulas

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot t, \tag{2}$$

donde t puede tomar cualesquiera valores. Estas soluciones también se pueden escribir como una proporción:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=t.$$

Sin embargo, escribiendo de este modo las soluciones, hay que tener presente que si uno de los denominadores se anula también conviene igualar a cero el numerador respectivo.

208. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+b)\,x-(a-b)\,y=4ab, \\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=2\,(a^2-b^2). \end{cases}$$

Resolución. Hallamos el determinante D del sistema y los determinantes D_x y D_y que forman parte de los numeradores de las fórmulas (1):

$$D=\begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2+(a-b)^2=2\,(a^2+b^2),$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2\,(a^2-b^2) & a+b \end{vmatrix}=4a^2b+4ab^2+2a^3-2a^2b-$$
$$-2ab^2+2b^3=2\,(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a+b),$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2\,(a^2-b^2) \end{vmatrix}=2a^3+2a^2b-2ab^2-2b^3-4a^2b+4ab^2=$$
$$=2\,(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a-b).$$

De aquí, $x = D_x/D = a + b$, $y = D_y/D = a - b$.

209. Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$$

Resolución. Utilizando las fórmulas (2), hallamos

$$x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=-22t, \quad y=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=14t, \quad z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=2t,$$

donde t puede tomar cualesquiera valores.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

210. $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ x+11y=6. \end{cases}$ **211.** $\begin{cases} 2x+y=1/5, \\ 4x+2y=1/3. \end{cases}$

212. $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, \\ bx+ay=a^2+b^2. \end{cases}$ **213.** $\begin{cases} 3x+2y=1/6. \\ 9x+6y=1/2. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x-5y+2z=0. \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=\cos 2\alpha, \\ x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen}2\alpha. \end{cases}$

216. $\begin{cases} a^2x-2(a^2+b^2)y+b^2z=0, \\ 2x+2y-3z=0. \end{cases}$

2. Determinantes de tercer orden y de un sistema de ecuaciones lineales. *El determinante de tercer orden* correspondiente a la tabla de elementos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Se llama *menor* del elemento dado de un determinante de tercer orden al determinante de segundo orden que se obtiene si en el determinante inicial se borra la fila y la columna que contienen el elemento dado. Se denomina *complemento algebraico* del elemento dado a su menor multiplicado por $(-1)^k$, donde k es la suma de los números de la fila y la columna que contienen el elemento dado.

De este modo, el signo que en este caso se asigna al menor del elemento respectivo del determinante se obtiene de la tabla siguiente:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

En la igualdad citada anteriormente que expresa el determinante de tercer orden, en el segundo miembro se tiene la suma de los productos de los elementos de la primera fila del determinante por sus complementos algebraicos.

Es justo el *teorema* general: *el determinante de tercer orden es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna de aquél por los complementos algebraicos de estos últimos.* Este teorema permite calcular el valor del determinante desarrollándolo por los elementos de su fila o columna cualesquiera.

Señalemos que también es justo el *teorema* siguiente: *la suma de los productos de cualquier fila (columna) del determinante por los complementos algebraicos de los elementos de una otra fila (columna) es igual a cero.*

Propiedades del determinante

1ª. *El determinante no varía si sus filas se sustituyen por las columnas y las columnas, por las filas respectivas.*

2ª. *El factor común de los elementos de cualquier fila (o columna) puede ser sacado del signo del determinante.*

3ª. *Si los elementos de una fila (columna) del determinante son respectivamente iguales a los elementos de otra fila (columna), el determinante es igual a cero.*

4ª. *Al permutar dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.*

5ª. *El determinante no varía si a los elementos de una fila (columna) se adicionan los elementos respectivos de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número (teorema sobre la combinación lineal de las series paralelas del determinante).*

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

se halla por las fórmulas de Cramer

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}, \qquad z=\frac{D_z}{D}, \tag{1}$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Con ello se supone que $D \neq 0$ (si $D = 0$, el sistema inicial es indeterminado o incompatible).

Si el sistema es homogéneo, o sea, tiene el aspecto

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

y su determinante es distinto de cero, entonces él tiene una solución única, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Si el determinante de un sistema homogéneo es igual a cero, entonces el sistema se reduce a dos ecuaciones independientes (la tercera es su consecuencia), o bien a una sola ecuación (las dos otras son su consecuencia). El primer caso tiene lugar cuando entre los menores del determinante de un sistema homogéneo hay por lo menos uno, distinto de cero, el segundo caso tiene lugar cuando todos los menores de este determinante son iguales a cero.

En ambos casos, (véase el punto 1) el sistema homogéneo tiene un conjunto infinito de soluciones.

217. Calcular el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Resolución. Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, obtendremos

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68.$$

218. Calcular el mismo determinante basándose en el teorema sobre la combinación lineal de los elementos de las filas (columnas).

Resolución. A los elementos de la primera fila les adicionamos los elementos respectivos de la segunda fila multiplicados por 5 y a los elementos de la tercera fila les sumamos los elementos respectivos de la segunda fila multiplicados por 7

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna obtenemos

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13\cdot 34 - 17\cdot 22 = 68.$$

219. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Resolución. Por las fórmulas (1) hallamos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3.$$

220. Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} 4x+\ y+\ z=0, \\ x+3y+\ z=0, \\ x+\ y+2z=0. \end{cases}$$

Resolución. Aquí $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Para calcular este determinante adicionamos a los elementos de la primera fila los de la tercera fila multiplicados por -4 y a los elementos de la segunda fila les sumamos los de la tercera fila, multiplicados por -1.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=17.$$

Como $D\neq 0$, el sistema sólo tiene la solución nula $x=y=z=0$.

221. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+2y-\ z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+\ y+2z=0. \end{cases}$$

Resolución. Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-15+14+1=0.$$

Por consiguiente, el sistema tiene soluciones distintas de la nula. Resolvemos el sistema de dos primeras ecuaciones (la tercera es consecuencia de ellas):

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0. \end{cases}$$

De aquí por las fórmulas (2) del punto 1 obtenemos

$$x=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}\cdot t=20t,\quad y=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}\cdot t=-28t,\quad z=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=4t.$$

222. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix},$$

desarrollándolo por los elementos de la tercera fila.

223. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix},$$

utilizando el teorema sobre la combinación lineal de las filas (columnas).

224. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}.$$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

225. $\begin{cases} 5x- \ y- \ z=0, \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16. \end{cases}$

226. $\begin{cases} x+3y-6z=12, \\ 3x+2y+5z=-10, \\ 2x+5y-3z=6. \end{cases}$

227. $\begin{cases} -5x+ \ y+ \ z=0, \\ x-6y+ \ z=0, \\ x+ \ y-7z=0. \end{cases}$

228. $\begin{cases} x+ \ y+ \ z=0, \\ 3x+6y+5z=0, \\ x+4y+3z=0. \end{cases}$

229. $\begin{cases} ax+by+cz=a-b, \\ bx+cy+az=b-c, \\ cx+ay+bz=c-a, \quad \text{si} \quad a+b+c\neq 0. \end{cases}$

230. $\begin{cases} ax+by+(a+b)z=0, \\ bx+ay+(a+b)z=0, \\ x+ \ y+2z=0. \end{cases}$

Capítulo II. Elementos de álgebra vectorial

§ 1. Coordenadas rectangulares en el espacio

Si en el espacio se da el sistema cartesiano rectangular $Oxyz$, entonces un punto M del espacio que tiene las coordenadas x (abscisa), y (ordenada) y z (z-coordenada) se designa por $M\ (x;\ y;\ z)$.

La distancia comprendida entre dos puntos $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ se determina por la fórmula

$$d=\sqrt{(x_2-y_2)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

En particular, la distancia del punto $M\ (x;\ y;\ z)$ al origen de coordenadas O se determina por la fórmula

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (2)$$

Si un segmento, de cuyos extremos sirven los puntos $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, está dividido por el punto $C\ (x;\ y;\ z)$ en la razón λ (véase el capítulo I, § 1), entonces las coordenadas del punto M se determinan por las fórmulas

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (3)$$

En particular, las coordenadas del punto medio del segmento se determinan por las fórmulas

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}; \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (4)$$

231. Se dan los puntos $M_1\ (2;\ 4;\ -2)$ y $M_2\ (-2;\ 4;\ 2)$. Hallar sobre la recta M_1M_2 el punto M que divide el segmento M_1M_2 en la razón $\lambda=3$.

Resolución. Utilizamos las fórmulas de división de un segmento en la razón dada

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{2+3\,(-2)}{1+3}=-1, \quad y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+3\cdot 4}{1+3}=4,$$

$$z_M=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-2+3\cdot 2}{1+3}=1.$$

Por consiguiente, el punto buscado M: $(-1;\ 4;\ 1)$.

232. Dado el triángulo: A (1; 1; 1), B (5; 1; —2), C (7; 9; 1). **Hallar** las coordenadas del punto D de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado CB.

Resolución. Hallamos las longitudes de los lados del triángulo que forman el ángulo A:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Por lo tanto, $|CD| : |DB| = 10 : 5 = 2$, puesto que la bisectriz divide el lado CB en partes proporcionales a los lados adyacentes. De este modo,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2(-2)}{1+2} = -1;$$

el punto buscado es D (17/3; 11/3; —1).

233. Hallar sobre el eje Ox un punto equidistante de los puntos A (2; —4; 5) y B (—3; 2; 7).

Resolución. Sea M el punto buscado. El mismo debe cumplir la igualdad $|AM| = |MB|$. Como el punto buscado está sobre el eje Ox, sus coordenadas son $(x;\ 0;\ 0)$ y por eso tenemos

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2},$$

$$|MB| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}.$$

De aquí, una vez efectuada la elevación al cuadrado, obtenemos $(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53$, o bien, $10x = -17$, es decir, $x = -1{,}7$. De este modo, el punto buscado es M: (—1,7; 0; 0).

234. Se dan los puntos A (3; 3; 3) y B (—1; 5; 7). Hallar las coordenadas de los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes congruentes.

235. Se da un triángulo: A (1; 2; 3), B (7; 10; 3), C (—1; 3; 1). Mostrar que el ángulo A es obtuso.

236. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un triángulo que tiene por vértices los puntos A (2; 3; 4), B (3; 1; 2) y C (4; —1; 3).

237. ¿En qué razón el punto M que equidista de los puntos A (3; 1; 4) y B (—4; 5; 3) dividirá el segmento del eje Oy comprendido entre el origen de las coordenadas y el punto C (0; 6; 0)?

238. Hallar sobre el eje Oz el punto que equidiste de los puntos M_1 (2; 4; 1) y M_2 (—3; 2; 5).

239. Hallar sobre el plano xOy el punto que equidiste de los puntos A (1; —1; 5), B (3; 4; 4) y C (4; 6; 1).

§ 2. Vectores y operaciones elementales sobre ellos

Un vector libre **a** (o sea, tal vector que sin cambiar de longitud y sentido puede ser trasladado a un punto cualquiera del espacio) definido en el espacio de coordenadas $Oxyz$, se puede representar de la forma

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Tal representación del vector **a** se llama *descomposición por los ejes de coordenadas* o *descomposición por los versores.*

Aquí a_x, a_y, a_z son las proyecciones del vector **a** sobre los ejes respectivos de coordenadas (se denominan *coordenadas* del vector **a**), **i**, **j**, **k** son los versores de estos ejes (vectores unitarios el sentido de cada uno de los cuales coincide con el sentido positivo del eje respectivo).

Los vectores $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ y $a_z\mathbf{k}$ cuya suma representa el vector **a** han recibido el nombre de *componentes* del vector **a** por los ejes de coordenadas.

La longitud (módulo) del vector **a** se designa por a o $|\mathbf{a}|$ y se determina por la fórmula

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

La dirección del vector **a** se determina por los ángulos α, β, y γ formados por el mismo con los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz. Los cosenos de estos ángulos (llamados *cosenos directores del vector*) se determinan por las fórmulas:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Los cosenos directores de un vector están ligados por la relación

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Si los vectores **a** y **b** están representados por sus descomposiciones en versores, su suma y diferencia se determinan por las fórmulas

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\,\mathbf{i} + (a_y - b_y)\,\mathbf{j} + (a_z - b_z)\,\mathbf{k}.$$

Recordemos que la *suma* de dos vectores **a** y **b** cuyos orígenes coinciden se representan por el vector de mismo origen que coincide con una diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores **a** y **b**. La *diferencia* **a** — **b** de estos vectores se representa por el vector que coincide con la segunda diagonal del mismo paralelogramo, con ello el origen de este vector está en el extremo del vector **b** y su extremo, en el extremo del vector **a** (fig. 16).

La suma de un número cualquiera de vectores se puede hallar por la regla del polígono (fig. 17).

El producto del vector **a** por un factor escalar m se determina por la fórmula

$$m\mathbf{a} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}.$$

Recordemos que los vectores **a** y m**a** son paralelos (colineales) y están orientados en el mismo sentido si $m > 0$ y en sentidos opuestos si $m < 0$.

En particular, si $m = 1/a$, el vector **a**/a tiene una longitud igual a la unidad *y el sentido coincidente con el del vector* **a**. *Este vector se denomina vector unitario* del vector **a** y se designa por $\mathbf{a}_0$.

De este modo, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/a$, o bien, $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$.

El vector $\overline{OM}$ cuyo origen está en el origen de coordenadas y su extremo se encuentra en el punto M (x; y; z) se llama *radio vector* del punto M y se designa por **r** (M) o simplemente por **r**. Como sus coordenadas coinciden con las del punto M, su descomposición en versores tiene la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

El vector $\overline{AB}$ que tiene por origen el punto A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y por extremo el punto B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ se puede escribir de la forma $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r}_2$ es

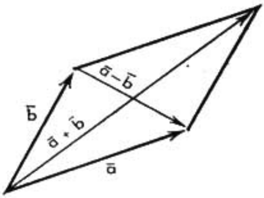


Fig. 16

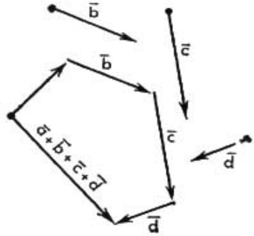


Fig. 17

el radio vector del punto B y $\mathbf{r}_1$, el radio vector del punto A. Por eso la descomposición del vector $\overline{AB}$ en versores tiene la forma

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}.$$

Su longitud coincide con la distancia entre los puntos A y B.

$$|\,\overline{AB}\,| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

En virtud de las fórmulas citadas anteriormente el sentido del vector $\overline{AB}$ se determina por los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

240. En el triángulo ABC el lado AB está dividido por los puntos M y N en tres partes congruentes: $|\,AM\,| = |\,MN\,| = |\,NB\,|$. Hallar el vector $\overline{CM}$ si $\overline{CA} = \mathbf{a}$, $\overline{CB} = \mathbf{b}$.

Resolución. Tenemos $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Por consiguiente, $\overline{AM} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/3$. Como $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, entonces

$$\overline{CM} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$

241. En el triángulo ABC la recta AM es la bisectriz del ángulo BAC, además, el punto M pertenece al lado BC. Hallar $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

Resolución. Tenemos $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. De la propiedad de la bisectriz del ángulo interior del triángulo se deduce que $|\,BM\,| : |\,MC\,| = b : c$, o sea, $|\,BM\,| : |\,BC\,| = b : (b + c)$. De aquí obtenemos $BM = \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$. Como $\overline{AM} =$

$= \overline{AB} + \overline{BM}$, entonces

$$\overline{AM} = \mathbf{b} + \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{b\mathbf{c} + c\mathbf{b}}{b+c}.$$

242. Los radios vectores de los vértices del triángulo ABC son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$. Hallar el radio vector del punto de intersección de las medianas del triángulo.

Resolución. Tenemos $\overline{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$; $\overline{BD} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2$ (D es el punto medio del lado BC); $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/2$; $\overline{AM} = (2/3)\,\overline{AD}$ (M es el punto de intersección de las medianas), por eso $\overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3$. De suerte que

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \mathbf{r}_1 + \overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3 + \mathbf{r}_1, \text{ o bien, } \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3.$$

243. Hallar la longitud del vector $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$ y sus cosenos directores.

Resolución. Tenemos

$$a = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \quad \cos\alpha = 20/70 = 2/7; \quad \cos\beta = 30/70 = 3/7;$$
$$\cos\gamma = -60/70 = -6/7.$$

244. Hallar el vector $\mathbf{a} = \overline{AB}$ si A (1; 3; 2) y B (5; 8; —1).

Resolución. Las proyecciones del vector $\overline{AB}$ sobre el eje de coordenadas son las diferencias de las coordenadas respectivas de los puntos B y A: $a_x = 5 - 1 = 4$, $a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. Por consiguiente, $\overline{AB} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

245. Se da el triángulo ABC. Sobre el lado BC está el punto M de modo que $|BM| : |MC| = \lambda$. Hallar $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

246. Se da $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Demostrar que $ABCD$ es un trapecio.

247. Hallar las proyecciones del vector $\mathbf{a}$ sobre el eje de coordenadas si $\mathbf{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$, A (0; 0; 1), B (3; 2; 1), C (4; 6; 5) y D (1; 6; 3).

248. Hallar la longitud del vector $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + (m+1)\,\mathbf{j} + m(m+1)\,\mathbf{k}$.

249. Se dan los radios vectores de los vértices del triángulo ABC: $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Mostrar que el triángulo ABC es isósceles.

250. Calcular el módulo del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} - (1/5) \times (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ y hallar sus cosenos directores.

251. Se dan los puntos M_1 (1; 2; 3) y M_2 (3; —4; 6). Hallar la longitud y el sentido del vector $\overline{M_1M_2}$.

252. Se da el vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Hallar el vector $\mathbf{b}$ si $b = a$, $b_y = a_y$ y $\mathbf{b}_x = 0$.

253. El radio vector del punto M forma con el eje Oy un ángulo de 60° y con el eje Oz un ángulo de 45°; su longitud $z = 8$. Hallar las coordenadas del punto M si su abscisa es negativa.

§ 3. Productos escalar y vectorial. Producto mixto

1. Producto escalar. Se llama *producto escalar* de dos vectores **a** y **b** a un número que es igual al producto de las longitudes de estos vectores por el coseno del ángulo φ entre ellos:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi.$$

Propiedades de un producto escalar

1ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$, o bien, $\mathbf{a}^2 = a^2$.
2ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, si $\mathbf{a} = 0$, ó $\mathbf{b} = 0$, ó $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
3ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (ley conmutativa).
4ª. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (ley distributiva).
5ª. $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b}) = m\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (ley asociativa con respecto a un factor escalar).

Los productos escalares de los versores de los ejes de coordenadas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Supongamos que los vectores **a** y **b** están definidos por sus coordenadas: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Entonces el producto escalar de estos vectores se encuentra por la fórmula

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

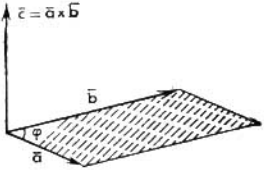


Fig. 18

2. Producto vectorial. Se llama *producto vectorial* del vector **a** por el vector **b**, a un tercer vector **c** que se determina del modo siguiente (fig. 18):

1) el módulo del vector **c** es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores **a** y **b** ($c = ab$ sen φ, donde φ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**);

2) el vector **c** es perpendicular a los vectores **a** y **b**;

3) los vectores **a**, **b** y **c**, después de reducidos a un origen común, están orientados unos con respecto a otros, como versores **i**, **j**, **k** (en el sistema derecho de coordenadas forman el llamado triplete *derecho* de los vectores).

El producto vectorial de **a** por **b** se designa $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Propiedades del producto vectorial

1ª. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, o sea, el producto vectorial no posee la propiedad conmutativa.
2ª. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, si $\mathbf{a} = 0$, ó $\mathbf{b} = 0$ o bien $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.
3ª. $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (propiedad conmutativa con respecto a un factor escalar).
4ª. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (propiedad distributiva).

Los productos vectoriales de los versores de coordenadas **i**, **j** y **k**:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

El producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ se encuentra más cómodamente por la fórmula

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. Producto mixto. Se llama *producto mixto* de los vectores **a**, **b** y **c** al producto escalar del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ por el vector **c**, o sea, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

El producto mixto de tres vectores **a**, **b**, **c** es igual en módulo al volumen del paralelepípedo construido sobre estos vectores.

Propiedades del producto mixto

1ª. El producto mixto de tres vectores es igual a cero si:

a) uno o más de los vectores multiplicados, es igual a cero;

b) dos de los vectores multiplicados son paralelos (colineales);

c) todos los tres vectores son paralelos a un mismo plano (coplanares)

2ª. El producto mixto no varía si en él cambian de lugar los signos de multiplicación vectorial ($\times$) y escalar ($\cdot$), o sea $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. En virtud de esta propiedad el producto mixto de los vectores **a**, **b** y **c** convenimos escribirlo de forma **abc**.

3ª. *El producto mixto no cambia si los vectores se transponen en el orden circular:*

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}.$$

4ª. Al transponer dos vectores cualesquiera el producto mixto cambia sólo en el signo:

$$\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{cba} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{acb} = -\mathbf{abc}.$$

Sean los vectores definidos por sus descomposiciones en versores: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

De las propiedades del producto mixto de tres vectores se deduce lo siguiente:

de condición necesaria y suficiente del carácter coplanar de tres vectores sirve la condición $\mathbf{abc} = 0$;

el volumen V_1 del paralelepípedo construido sobre los vectores **a**, **b** y **c** y el volumen V_2 de la pirámide triangular se encuentran por las fórmulas:

$$V_1 = |\,\mathbf{abc}\,|; \quad V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6} |\,\mathbf{abc}\,|.$$

254. Hallar el producto escalar de los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. Hallamos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

255. Se dan los vectores $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. ¿Para qué valor de m estos vectores son perpendiculares?

Resolución. Hallamos el producto escalar de estos vectores: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4m + 3m - 28$; como, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. De aquí $7m - 28 = 0$, o sea, $m = 4$.

256. Hallar $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si $a = 2$, $b = 3$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Resolución. Tenemos

$$(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 10\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2 = 10a^2 - 3b^2 = 40 - 27 = 13$$

257. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Resolución. Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi$, entonces $\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$. Tenemos

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot6+2\cdot4+3(-2)=8, \quad a=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14},$$

$$b=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}.$$

Por consiguiente $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ y $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

258. Hallar el vector unitario que tiene el mismo sentido que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. Hallamos la longitud del vector dado: $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Puesto que $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a}_0 = (1/3)\,\mathbf{i} + (2/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$.

259. Hallar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

o sea, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

260. Calcular el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Resolución. Encontramos el producto vectorial de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\mathbf{i} - 42\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Puesto que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo construido sobre ellos, entonces

$$S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{14^2+42^2+21^2} = 49 \text{ (unidades cuadradas).}$$

261. Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A\,(1;\,1;\,1)$, $B\,(2;\,3;\,4)$, $C\,(4;\,3;\,2)$.

Resolución. Hallamos los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (4-1)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (2-1)\,\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

El área del triángulo ABC es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por eso hallamos el producto vectorial de estos vectores:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mid \overline{AB}\times\overline{AC}\mid=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}\text{ (unidades cuadradas).}$$

262. Calcular el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ y $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$ si $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=30°$.

Resolución. Tenemos

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=$$
$$=3\cdot 0+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\cdot 0=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(*puesto que* $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$). *De suerte que*

$$S=8\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8\cdot 1\cdot 1\cdot\operatorname{sen}30°=4\text{ (unidades cuadradas).}$$

263. Hallar el producto mixto de los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=26+5+2=33.$$

264. Mostrar que los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ son coplanares.

Resolución. Hallamos el producto mixto de los vectores:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Como $\mathbf{abc}=0$, los vectores dados son coplanares.

265. Hallar el volumen de una pirámide triangular que tiene por vértices los puntos $A\ (2;\ 2;\ 2)$, $B\ (4;\ 3;\ 3)$, $C\ (4;\ 5;\ 4)$ y $D\ (5;\ 5;\ 6)$.

Resolución. Hallamos los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ que coinciden con las aristas de la pirámide convergentes en el vértice A:

$$\overline{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad \overline{AC}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k},\quad \overline{AD}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$$

Encontramos el producto mixto de estos vectores:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7.$$

Puesto que el volumen de la pirámide es igual a 1/6 parte del volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, entonces $V=7/6$ (unidades cúbicas).

266. Calcular $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$.

Resolución. Como $(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$, estos vectores son coplanares (fig. 19). Por lo tanto, su producto mixto es igual a cero, o sea $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$.

267. Hallar el producto escalar de los vectores $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ y $5\mathbf{a}-6\mathbf{b}$, si $a=4$, $b=6$ y el ángulo comprendido entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es igual a $\pi/3$.

268. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

269. ¿Para qué valor de m los vectores $\mathbf{a}=m\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{b}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ son perpendiculares?

270. Hallar el producto escalar de los vectores $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ y $5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+7\mathbf{c}$ si $a=1$, $b=2$, $c=3$ y $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}})=(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}})=\pi/3$.

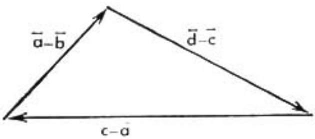


Fig. 19

271. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ al efectuar el desplazamiento $\mathbf{s}$ si $F=2$, $s=5$, $\varphi=(\widehat{\mathbf{F},\mathbf{s}})=\pi/6$.

272. Hallar el vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

273. Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son de igual longitud y forman de dos en dos ángulos congruentes. Hallar el vector $\mathbf{c}$ si $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

274. Se dan los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Hallar $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ y $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

275. Se dan los radios vectores de tres vértices sucesivos del paralelogramo $ABCD$: $\mathbf{r}_A=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C=7\mathbf{i}+9\mathbf{j}+11\mathbf{k}$. Determinar el radio vector del cuarto vértice D.

276. Mostrar que los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no pueden ser perpendiculares si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}>0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}>0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}>0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}<0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{j}<0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}<0$.

277. Mostrar que los vectores $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+m\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+(m+1)\mathbf{k}$ y $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+m\mathbf{k}$, no pueden ser coplanares para ningún valor de m.

278. ¿Pueden los números $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ ser distintos de cero y satisfacer las ecuaciones que se dan a continuación:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{aligned} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2&=0,\\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3&=0,\\ x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3&=0? \end{aligned}$$

279. Hallar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

280. Calcular el área de un triángulo que tiene por vértices los puntos $A\ (2;\ 2;\ 2)$, $B\ (4;\ 0;\ 3)$ y $C\ (0;\ 1;\ 0)$.

281. Hallar el producto mixto de los vectores $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

282. Mostrar que los vectores $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, son coplanares.

283. Calcular el volumen de una pirámide triangular que tiene por vértices $A\,(0;\ 0;\ 1)$, $B\,(2;\ 3;\ 5)$, $C\,(6;\ 2;\ 3)$ y $D\,(3;\ 7;\ 2)$.

284. En el problema precedente hallar la longitud de la altura de la pirámide, bajada a la cara BCD.

285. Mostrar que los puntos $A\,(5;\ 7;\ -2)$, $B\,(3;\ 1;\ -1)$, $C\,(9;\ 4;\ -4)$ y $D\,(1;\ 5;\ 0)$ pertenecen a un plano.

Capítulo III. Geometría analítica del espacio

§ 1. El plano y la recta

1. El plano. 1) *La ecuación de un plano en forma vectorial*, tiene el aspecto

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p.$$

Aquí $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el radio vector de un punto corriente del plano $M(x;\ y;\ z)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$, es el vector unitario que tiene el sentido de la perpendicular bajada sobre el plano a partir del origen de las coordenadas; α, β, γ, son los ángulos formados por esta perpendicular con los ejes de las coordenadas Ox, Oy, Oz, y p es la longitud de esta perpendicular.

Al pasar a las coordenadas esta ecuación adquiere el aspecto

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{1}$$

(*ecuación normal de un plano*).

2) La ecuación de todo plano se puede escribir también en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

si $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (*ecuación general*). Aquí A, B, C, se pueden considerar como coordenadas de cierto vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ perpendicular al plano (*vector normal* del plano). Para reducir la ecuación general del plano a la forma normal es necesario multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor normalizador

$$\mu = \pm 1/N = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{3}$$

donde el signo delante del radical es contrario al del término independiente D en la ecuación general del plano.

3) Casos particulares de la situación de un plano definido por la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$; es paralelo al eje Ox;
$B = 0$; es paralelo al eje Oy;
$C = 0$; es paralelo al eje Oz;
$D = 0$; pasa por el origen de las coordenadas;
$A = B = 0$; es perpendicular al eje Oz (paralelo al plano xOy);
$A = C = 0$; es perpendicular al eje Oy (paralelo al plano xOz);
$B = C = 0$; es perpendicular al eje Ox (paralelo al plano yOz);
$A = D = 0$; pasa por el eje Ox;
$B = D = 0$; pasa por el eje Oy;
$C = D = 0$; pasa por el eje Oz;
$A = B = D = 0$; coincide con el plano xOy $(z = 0)$;
$A = C = D = 0$; coincide con el plano xOz $(y = 0)$;
$B = C = D = 0$; coincide con el plano yOz $(x = 0)$.

Si en la ecuación general de un plano el coeficiente $D \neq 0$, entonces, dividiendo todos los términos de la ecuación por $-D$, ésta se puede llevar a la forma

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

(aquí $a = -D/A$; $b = -D/B$, $c = -D/C$). Esta ecuación del plano se llama *ecuación segmentaria*; en ella a, b y c son, respectivamente, la abscisa, la ordenada y la z-coordenada de los puntos de intersección del plano con los ejes Ox, Oy y Oz.

4) *El ángulo* φ *entre los planos* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se determina por la fórmula

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{5}$$

La condición de paralelismo de dos planos es:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2. \tag{6}$$

La condición de perpendicularidad de dos planos es:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{7}$$

5) *La distancia del punto* M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *al plano* definido por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtiene por la fórmula

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

Ella es igual, en valor absoluto, al resultado obtenido por la sustitución de las coordenadas del punto en la ecuación normal del plano; el signo del resultado de esta sustitución caracteriza la posición recíproca del punto y del origen de las coordenadas con respecto al plano dado: «+» si el punto M_0 y el origen de las coordenadas están situados a diferentes lados del plano y «—» si ellos están situados a un mismo lado del plano.

6) *La ecuación de un plano que pasa por el punto* M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *y la perpendicular al vector* $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, tiene la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

Para los valores arbitrarios de A, B y C esta última ecuación define cierto plano perteneciente a un fajo de planos que pasan por el punto M_0. Por eso se llama con frecuencia *ecuación de un fajo de planos*.

7) La ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{10}$$

para un valor arbitrario de λ define cierto plano que pasa por la recta de intersección de los planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \ (\mathrm{I}) \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{II}$$

o sea, cierto plano perteneciente a un haz de los planos que pasan por esta recta (en virtud de lo cual tal ecuación se denomina frecuentemente *ecuación de un haz de planos*). Si los planos definidos por las ecuaciones (I) y (II) son paralelos, el haz de planos se convierte en conjunto de planos paralelos a aquéllos.

8) *La ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados* $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$ (aquí $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$) se encuentra con más facilidad a partir de la condición de coplanarcidad de los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, es el radio vector de un punto corriente M del plano buscado:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0,$$

o, escribiendo en la forma de coordenadas:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (11)$$

286. Reducir a la forma normal la ecuación del plano $2x+3y-6z+21=0$.

Resolución. Hallamos el factor normalizador (cuyo signo es «−», puesto que $D=21>0$):

$$\mu=-1/\sqrt{2^2+3^2+6^2}=-1/7.$$

De suerte que la ecuación normal del plano dado tiene la forma

$$-(2/7)\,x-(3/7)\,y+(6/7)\,z-3=0.$$

287. Determinar la distancia del punto M_0 $(3;\ 5;\ -8)$ al plano $6x-3y+2z-28=0$.

Resolución. Utilizando la fórmula (8) de la distancia de un punto a un plano, hallamos

$$d=\frac{|\,6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28\,|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}.$$

Puesto que el resultado de sustitución de las coordenadas del punto M_0 en la ecuación normal del plano es negativo, el punto M_0 y el origen de coordenadas están a un lado del plano dado.

288. Escribir la ecuación de un plano que pasa por el punto M $(2;\ 3;\ 5)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Resolución. Basta con aplicar la ecuación (9) del plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a un vector dado:
$4\,(x-2)+3\,(y-3)+2\,(z-5)=0$, o sea, $4x+3y+2z-27=0$.

289. Hallar la ecuación de un plano que pase por el punto M $(2;\ 3;\ -1)$ y es paralelo al plano $5x-3y+2z-10=0$.

Resolución. Escribimos la ecuación (9) de un fajo de planos que pasan por el punto dado:

$$A\,(x-2)+B\,(y-3)+C\,(z+1)=0.$$

El vector normal al plano buscado coincide con el vector normal $\mathbf{n}=\{5;\ -3;\ 2\}$ al plano dado; por consiguiente, $A=5$, $B=-3$, $C=2$ y la ecuación del plano buscado tendrá el aspecto

$5\,(x-2)-3\,(y-3)+2\,(z+1)=0$, o bien $5x-3y+2z+1=0$.

290. Desde el punto P $(2;\ 3;\ -5)$ se trazan las perpendiculares a los ejes de las coordenadas. Escribir la ecuación del plano que pasa por sus bases.

Resolución. De bases de las perpendiculares trazadas a los planos de coordenadas sirven los puntos siguientes: M_1 $(2;\ 3;\ 0)$, M_2 $(2;\ 0;\ -5)$, M_3 $(0;\ 3;\ -5)$. Utilizando la relación (11), escribamos la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0, \text{ o bien } 15x+10y-6z-60=0.$$

291. Escribir la ecuación de un plano que pase por el punto A (5; 4; 3) y corte segmentos congruentes sobre los ejes de coordenadas.

Resolución. Aplicamos la ecuación segmentaria (4) del plano, en la cual $a = b = c$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación del plano buscado, por eso se cumple la igualdad $5/a + 4/a + 3/a = 1$, de donde $a = 12$. Así, obtenemos la ecuación $x + y + z - 12 = 0$.

292. Escribir la ecuación de un plano que pase por la línea de intersección de los planos $x + y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y - z + 2 = 0$ y por el punto M (3; 2; 1).

Resolución. Utilizamos la ecuación (10) de un haz de planos:

$$x + y + 5z - 1 + \lambda\,(2x + 3y - z + 2) = 0.$$

Determinamos el valor de λ a partir de la condición de que las coordenadas del punto M satisfagan esta ecuación:

$$3 + 2 + 5 - 1 + \lambda\,(6 + 6 - 1 + 2) = 9 + 13\lambda = 0,$$

de donde $\lambda = -9/13$. De este modo, la ecuación buscada tiene la forma

$$x + y + 5z - 1 - \frac{9}{13}\,(2x + 3y - z + 2) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 5x + 14y - 74z + 31 = 0.$$

293. Escribir la ecuación del plano que pase por la línea de intersección de los planos $x + 3y + 5z - 4 = 0$ y $x - y - 2z + 7 = 0$ y es paralelo al eje Oy.

Resolución. Utilicemos la ecuación de un haz de planos:

$$x + 3y + 5z - 4 + \lambda\,(x - y - 2z + 7) = 0;$$

$$(1 + \lambda)\,x + (3 - \lambda)\,y + (5 - 2\lambda)\,z + (7\lambda - 4) = 0.$$

Como el plano buscado es paralelo al eje de las ordenadas, el coeficiente de y debe ser igual a cero: $3 - \lambda = 0$, o sea, $\lambda = 3$. Sustituyend oel valor hallado λ en la ecuación del haz, obtenemos $4x - z + 17 = 0$.

294. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A (2; —1; 4) y B (3; 2; —1) perpendicularmente al plano $x + y + 2z - 3 = 0$.

Resolución. En calidad de vector normal **N** del plano buscado se puede tomar un vector que sea perpendicular al vector $\overline{AB} = \{1;\ 3;\ -5\}$ y al vector normal $\mathbf{n} = \{1;\ 1;\ 2\}$ del plano dado. Por eso tomamos como **N** el producto vectorial de $\overline{AB}$ por $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{N} = \overline{AB} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Queda por aplicar la ecuación del plano que pasa por un punto dado (por ejemplo, A) perpendicularmente al vector definido $\mathbf{N} = \{11;\ -7;\ -2\}$:

$$11\,(x - 2) - 7\,(y + 1) - 2\,(z - 4) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 11x - 7y - 2z - 21 = 0.$$

295. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto M (3; -1; -5) y es perpendicular a los planos $3x-2y+2z+7=0$ y $5x-4y+3z+1=0$.

Resolución. Es evidente que en calidad de vector normal $\mathbf{N}$ del plano buscado se puede tomar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{n}_1=\{3;\ -2;\ 2\}$ y $\mathbf{n}_2=\{5;\ -4;\ 3\}$ de los planos dados:

$$\mathbf{N}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -4 & 3\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\mathbf{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

Ahora, utilizando la ecuación del plano que pasa por el punto dado M (3; -1; -5) perpendicularmente al vector $\mathbf{N}=\{2;\ 1;\ -2\}$, obtenemos

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0,\ \text{o bien}\ 2x+y-2z-15=0.$$

296. Reducir a la forma normal las ecuaciones de los planos siguientes: 1) $x+y-z-2=0$; 2) $3x+5y-4z+7=0$.

297. Hallar la distancia del punto M_0 (1; 3; -2) al plano $2x-3y-4z+12=0$. ¿Cómo está situado el punto M_0 con respecto al plano?

298. Hallar la longitud de la perpendicular bajada del punto M_0 (2; 3; -5) al plano $4x-2y+5z-12=0$.

299. Hallar la ecuación del plano que pasa: 1) por el punto M (-2; 3; 4) si este plano corta sobre los ejes de las coordenadas segmentos congruentes; 2) por el punto N (2; -1; 4) si este plano corta sobre el eje Oz un segmento dos veces mayor que sobre los ejes Ox y Oy.

300. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P (2; 0; -1) y Q (1; -1; 3) y sea perpendicular al plano $3x+2y-z+5=0$.

301. Hallar sobre el plano $2x-5y+2z+5=0$ un punto M tal, que la recta OM forme ángulos congruentes con los ejes de coordenadas.

302. Hallar la ecuación de un plano conociendo que el punto P (4; -3; 12) sirve de base a la perpendicular bajada del origen de las coordenadas a este plano.

303. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por los ejes de coordenadas perpendicularmente al plano $3x-4y+5z-12=0$.

304. Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de los puntos P (1; -4; 2) y Q (7; 1; -5).

305. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P (0; 2; 0) y Q (2; 0; 0) y forma un ángulo de 60° con el plano $x=0$.

306. Calcular el ángulo comprendido entre dos planos que pasan por el punto M (1; -1; -1) uno de los cuales contiene el eje Ox y el otro, el eje Oz.

307. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de las coordenadas y por los puntos P (4; -2; 1) y Q (2; 4; -3).

308. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de los planos $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z+3=$

$= 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ y por los puntos $M(0; 3; 0)$ y $N(1; 1; 1)$.

309. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x + 5y + 9z - 13 = 0$, $3x - y - 5z + 1 = 0$ y por el punto $M(0; 2; 1)$.

310. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x + 2y + 3z - 5 = 0$ y $3x - 2y - z + 1 = 0$ y corte segmentos congruentes sobre los ejes Ox y Oz.

311. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $(1 + \sqrt{2})x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ y forme con el plano de las coordenadas xOy un ángulo de $60°$.

312. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $2x - y - 12z - 3 = 0$ y $3x + y - 7z - 2 = 0$ y es perpendicular al plano $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

313. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ y por el origen de las coordenadas.

314. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M(0; 2; 1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

315. ¿Qué ángulo forma con el plano $x + y + 2z - 4 = 0$ el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

2. La recta. 1) Una recta puede ser definida por las *ecuaciones de dos planos*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

que se intersecan por esta recta.

2) Eliminando sucesivamente x e y de las ecuaciones precedentes, obtendremos las ecuaciones $x = az + c$, $y = bz + d$. Aquí la recta está determinada por *dos planos que la proyectan sobre los planos* xOz e yOz.

3) *Las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ y $M_2(x_2; y_2; z_2)$ tienen la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1}$$

4) Las llamadas *ecuaciones canónicas*

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{2}$$

definen una recta que pasa por el punto $M(x_1; y_1; z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{s} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. En particular, estas ecuaciones se pueden escribir de la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

donde α, β y γ, son los ángulos formados por la recta con los ejes de las coordenadas. Los cosenos directores de la recta se encuentran por las fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l_2 + m^2 + n^2}}. \tag{3}$$

5) Introduciendo el parámetro t no es difícil pasar de las ecuaciones canónicas a *las paramétricas*:

$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases} \tag{4}$$

6) *El ángulo entre dos rectas* definidas por sus ecuaciones canónicas $(x - x_1)/l_1 = (y - y_1)/m_1 = (z - z_1)/n_1$ y $(x - x_2)/l_2 = (y - y_2)/m_2 = (z - z_2)/n_2$ se determina por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}; \tag{5}$$

la condición de paralelismo de dos rectas es:

$$l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2; \tag{6}$$

la condición de perpendicularidad de dos rectas es:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{7}$$

7) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas definidas por sus ecuaciones canónicas estén situadas en un mismo plano (*condición de carácter coplanar* de dos rectas) es:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Si las magnitudes l_1, m_1, n_1 no son respectivamente proporcionales a l_2, m_2, n_2, la relación indicada es la condición necesaria y suficiente de intersección de dos rectas en el espacio.

8) *El ángulo entre la recta* $(x - x_1)/l = (y - y_1)/m = (z - z_1)/n$ *y el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ se determina por la fórmula

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \tag{9}$$

la condición de paralelismo de una recta y un plano es:

$$Al + Bm + Cn = 0; \tag{10}$$

la condición de perpendicularidad de una recta y un plano es:

$$A/l = B/m = C/n. \tag{11}$$

9) Para determinar *el punto de intersección de la recta* $(x - x_0)/l = (y - y_0)/m = (z - z_0)/n$ *con el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ hay que resolver conjuntamente sus ecuaciones para lo cual conviene utilizar las ecuaciones paramétricas de la recta $x = lt + x_0$, $y = mt + y_0$, $z = nt + z_0$:

a) si $Al + Bm + Cn \neq 0$, la recta corta al plano;

b) si $Al + Bm + Cn = 0$ y $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, la recta es paralela al plano;

c) si $Al + Bm + Cn = 0$ y $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, la recta pertenece al plano.

316. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las rectas $2x - y + 3z - 1 = 0$ y $5x + 4y - z - 7 = 0$.

Resolución. Primer procedimiento. Eliminando y primeramente y luego z, tenemos

$$13x + 11z - 11 = 0 \quad \text{y} \quad 17x - 11y - 22 = 0.$$

Si en cada una de las ecuaciones se despeja x, se obtiene

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Segundo procedimiento. Hallemos un vector $\mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ que sea paralelo a la recta buscada. Como este vector debe ser perpendicular a los vectores normales $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\mathbf{N}_2=5\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ de los planos dados, se puede tomar como $\mathbf{s}$ el producto vectorial de los vectores $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$:

$$\mathbf{s}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+17\mathbf{j}+13\mathbf{k}.$$

De este modo, $l=-11$; $m=17$; $n=13$.

En calidad de punto $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ por el cual pasa la recta buscada se puede tomar el punto de intersección de la misma con cualquiera de los planos de coordenadas, por ejemplo con el plano yOz. Como en este caso $x_1=0$, las coordenadas y_1 y z_1 de este punto se determinarán por el sistema de ecuaciones de los planos dados, haciendo en ellas $x=0$:

$$\begin{cases} -y+3z-1=0,\\ 4y-z-7=0.\end{cases}$$

Al resolver este sistema, hallamos $y_1=2$, $z_1=1$. De suerte que la recta buscada se define por las ecuaciones $x/(-11)=(y-2)/17=(z-1)/13$.

317. Construir la recta

$$\begin{cases} 2x+3y+3z-9=0,\\ 4x+2y+\ z-8=0.\end{cases}$$

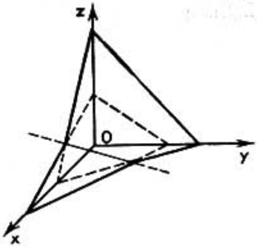


Fig. 20

Resolución. La recta buscada se puede construir como la línea de intersección de los planos. Para esto escribimos las ecuaciones segmentarias de estos planos sobre los ejes:

$$\frac{x}{4,5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1, \qquad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1.$$

Al construir los planos dados, obtenemos la recta buscada (fig. 20).

318. Bajar la perpendicular desde el origen de las coordenadas a la recta $(x-2)/2=(y-1)/3=(z-3)/1$.

Resolución. Utilizando la condición (11) de perpendicularidad de una recta y un plano, y suponiendo $A=l$, $B=m$, $C=n$, $D=0$, determinamos la ecuación del plano que pasa por el origen de las coordenadas y es perpendicular a la recta dada. Esta ecuación tiene la forma $2x+3y+z=0$.

Hallamos el punto de intersección de este plano y la recta dada. Las ecuaciones paramétricas de la recta se escribirán así: $x=2t+2$, $y=3t+1$, $z=t+3$. Para determinar t tenemos la ecuación

$$2(2t+2)+3(3t+1)+t+3=0,$$

de donde $t=-5/7$. Las coordenadas del punto de intersección son: $x=4/7$, $y=-8/7$, $z=16/7$, o sea, $M(4/7;\ -8/7;\ 16/7)$.

Queda por determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de las coordenadas y por el punto M; utilizando las relaciones (1), obtendremos

$$x/(4/7)=y/(-8/7)=z/(16/7), \quad \text{o bien,} \quad x/1=y/(-2)=z/4.$$

319. En las ecuaciones de la recta $x/2 = y/(-3) = z/n$ determinar el parámetro n de modo tal que esta recta se corte con la recta $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$, y hallar el punto de intersección.

Resolución. Para encontrar el parámetro n utilizamos la condición (8) de intersección de dos rectas, haciendo $x_1 = -1$, $y_1 = -5$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $l_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, $l_2 = 2$, $m_2 = -3$, $n_2 = n$, obtendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien, } 2n+10+3-15n=0, \text{ o sea, } n=1.$$

Para hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas $x/2 = y/(-3) = z/1$ y $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$, expresamos en las primeras ecuaciones x e y por medio de z: $x = 2z$, $y = -3z$. Sustituyendo estos valores en la igualdad $(x+1)/3 = (y+5)/2$, tenemos $(2z+1)/3 = (-3z+5)/2$, de donde $z = 1$. Conociendo z, encontramos $x = 2z = 2$, $y = -3z = -3$. Por consiguiente, M (2; -3; 1).

320. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto M (3; 2; -1) y corta el eje Ox en ángulo recto.

Resolución. Como la recta es perpendicular al eje Ox y lo corta, ella pasa por el punto N (3; 0; 0). Al determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M y N, obtenemos $(x-3)/0 = (y-2)/(-2) = (z+1)/1$.

321. Dado el plano $x + y - 2z - 6 = 0$ y el punto M (1; 1; 1) fuera del mismo. Hallar un punto N que sea simétrico del punto M con respecto a este plano.

Resolución. Escribamos la ecuación de una recta cualquiera que pase por el punto M: $(x-1)/l = (y-1)/m = (z-1)/n$. Las coordenadas $\{l; m; n\}$ del vector director de la recta perpendicular al plano, se pueden sustituir por las coordenadas del vector normal $\mathbf{n} = \{1; 1; -2\}$ del plano dado. Entonces las ecuaciones de esta recta se escribirán de la forma

$$(x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2).$$

Encontramos la proyección del punto M sobre el plano dado resolviendo conjuntamente las ecuaciones

$$x+y-2z-6=0, \quad (x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2).$$

Escribimos las ecuaciones de la recta de la forma $x = t+1$, $y = t+1$ $z = -2t+1$. Sustituyendo estas expresiones para x, y y z en la ecuación del plano, hallamos $t = 1$, de donde $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Las coordenadas del punto simétrico se hallan por las fórmulas

$$\bar{x} = (x_M + x_N)/2, \quad \bar{y} = (y_M + y_N)/2, \quad \bar{z} = (z_M + z_N)/2,$$

o sea,

$$2 = (1 + x_N)/2, \quad 2 = (1 + y_N)/2, \quad -1 = (1 + z_N)/2,$$

de donde $x_N = 3$, $y_N = 3$, $z_N = -3$. Por lo tanto, N (3; 3; -3).

322. Dada la recta $(x-1)/2 = y/3 = (z+1)/(-1)$ y el punto M (1; 1; 1) fuera de ella, hallar el punto N, simétrico del punto M respecto a la recta dada.

Resolución. La ecuación del plano que proyecta el punto M sobre la recta dada tiene la forma

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0.$$

Las coordenadas del vector normal $\{A; B; C\}$ del plano perpendicular a la recta las sustituimos por las del vector director $\{2; 3; -1\}$ de la recta dada; entonces obtendremos

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0, \text{ o bien, } 2x+3y-z-4=0.$$

Hallamos la proyección del punto M sobre la recta para lo cual resolvemos conjuntamente el sistema de ecuaciones

$$2x+3y-z-4=0, \quad (x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1).$$

Las ecuaciones paramétricas de esta recta tienen la forma $x=2t+1$, $y=3t$, $z=-t-1$. Sustituyendo x, y y z en la ecuación del plano, encontramos $t = 1/14$. De aquí $x=8/7$, $y=3/14$, $z=-15/14$.

Entonces las coordenadas del punto simétrico pueden ser halladas utilizando las fórmulas para las coordenadas del punto medio del segmento, o sea,

$$8/7=(1+x_N)/2, \quad 3/14=(1+y_N)/2, \quad -15/14=(1+z_N)/2,$$

de donde $x_N=9/7$, $y_N=-4/7$, $z_N=-22/7$. Por consiguiente, $N(9/7; -4/7; -22/7)$.

323. Trazar por la recta $(x+1)/2=(y-1)/(-1)=(z-2)/3$ un plano que sea paralelo a la recta $x/(-1)=(y+2)/2=(z-3)/(-3)$.

Resolución. Escribimos las ecuaciones de la primera de las rectas dadas con ayuda de las ecuaciones de dos planos que la proyectan sobre los planos xOy e yOz, respectivamente:

$$(x+1)/2=(y-1)/(-1), \quad \text{o bien,} \quad x+2y-1=0;$$
$$(y-1)/(-1)=(z-2)/3, \quad \text{o bien,} \quad 3y+z-5=0.$$

La ecuación del haz de los planos que pasan por esta recta tiene la forma

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0, \quad \text{o bien,} \quad x+(2+3\lambda)y+\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

Utilizando la condición de paralelismo de una recta y un plano, determinamos λ de modo tal, que el plano respectivo del haz sea paralelo a la segunda de las rectas dadas. Tenemos $-1\cdot 1+2(2+3\lambda)-3\lambda=0$, o bien, $3\lambda+3=0$, de donde $\lambda=-1$. De este modo, el plano buscado se define por la ecuación $x-y-z+4=0$.

324. Hallar la ecuación de la proyección de la recta $(x-1)/1=(y+1)/2=z/3$ sobre el plano $x+y+2z-5=0$.

Resolución. Escribamos las ecuaciones de la recta dada en forma de las ecuaciones de dos planos que la proyectan sobre los planos xOy y xOz, respectivamente:

$$(x-1)/1=(y+1)/2, \quad \text{o bien,} \quad 2x-y-3=0;$$
$$(x-1)/1=z/3, \quad \text{o bien} \quad 3x-z-3=0.$$

La ecuación del haz de los planos que pasan por la recta dada se escribe de la forma

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0, \quad \text{o bien,} \quad (2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Utilizando la condición de perpendicularidad de los planos, escojamos en este haz el plano que proyecta la recta dada sobre el plano dado. Tenemos $1\cdot(2+3\lambda)+1(-1)+2(-\lambda)=0$, o bien, $\lambda+1=0$, de donde $\lambda=-1$.

De suerte que la ecuación del plano proyectante tiene la forma

$$2x - y - 3 + (-1)\cdot(3x - z - 3) = 0, \quad \text{o bien,} \quad x + y - z = 0.$$

La proyección buscada se puede determinar como línea de intersección de dos planos, o sea, del dado y el proyectante:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Reduciendo estas ecuaciones de la recta a la forma canónica, obtendremos finalmente

$$x/1 = (y - 5/3)/(-1) = (z - 5/3)/0.$$

325. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto M (5; 3; 4) y sea paralela al vector $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

Resolución. Utilizamos las ecuaciones canónicas de la recta. Suponiendo que en las ecuaciones (2) $l = 2$, $m = 5$, $n = 8$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $z_1 = 4$, obtenemos

$$(x - 5)/2 = (y - 3)/5 = (z - 4)/(-8).$$

326. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto M (1; 1; 1) y es perpendicular a los vectores $\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{s}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. La recta es paralela al vector $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, por eso ella es definida por las ecuaciones

$$(x - 1)/5 = (y - 1)/(-1) = (z - 1)/(-7).$$

327. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

sobre los planos de las coordenadas.

328. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de la recta con los ejes de coordenadas.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

329. Calcular los ángulos formados por la recta

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

330. Hallar las ecuaciones de la recta que pase por el punto M (1; −2; 3) y que forme con los ejes Ox y Oy ángulos de 45° y 60°, respectivamente.

331. Hallar las ecuaciones de la recta que pase por el punto N (5; −1; −3) y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

332. Hallar el punto de intersección de las rectas $(x-1)/(-1) = (y-2)/5 = (z+4)/2$ y $(x-2)/2 = (y-5)/(-2) = (z-1)/3$.

333. Dados tres vértices sucesivos de un paralelogramo: A (3; 0; −1), B (1; 2; −4) y C (0; 7; −2), hallar las ecuaciones de los lados AD y CD.

334. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos M (2; −5; 1) y N (−1; 1; 2).

335. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $x/1 = (y-3)/2 = (z-2)/1$ y $(x-3)/1 = (y+1)/2 = (z-2)/1$.

336. Se dan los puntos A (−1; 2; 3) y B (2; −3; 1). Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto M (3; −1; 2) y es paralela al vector $\overline{AB}$.

337. Hallar el ángulo comprendido entre las rectas

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

338. Hallar en el plano yOz la recta que pasa por el origen de las coordenadas y es perpendicular a la recta $\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2z=-2. \end{cases}$

339. Se dan dos vértices del paralelogramo $ABCD$: C (−2; 3; −5) y D (0; 4; −7) y el punto de intersección de las diagonales M (1; 2; −3; 5). Hallar las ecuaciones del lado AB.

340. El triángulo ABC está formado por la intersección del plano $x+2y+4z-8=0$ con los ejes de las coordenadas. Hallar las ecuaciones de la línea media del triángulo, paralela al plano xOy.

341. Se dan los puntos A (1; 1; 1), B (2; 3; 3) y C (3; 3; 2). Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular a los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

342. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto M (0; 2; 1) y forma los ángulos congruentes con los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{k}$.

343. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $(x+1)/3 = (y-2)/(-1) = z/4$ y es perpendicular al plano $3x+y-z+2=0$.

344. Hallar las ecuaciones de la proyección de la recta $x/2 = (y+3)/1 = (z-2)/(-2)$ sobre el plano $2x+3y-z-5=0$.

§ 2. Superficies de segundo orden

1. Esfera. En el sistema cartesiano de coordenadas una esfera con centro en el punto C $(a;\ b;\ c)$ y radio r se define por la ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \tag{1}$$

Si el centro de la esfera está en el origen de coordenadas su ecuación tiene la forma

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \tag{2}$$

345. Hallar las coordenadas del centro y del radio de una esfera definida por la ecuación $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

Resolución. Reducimos la ecuación de la esfera a la forma canónica (1) para lo cual completamos los cuadrados de los términos que contienen x, y, z, o sea, escribimos la ecuación de la forma siguiente:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

o bien,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente, el centro de la esfera es el punto $C\,(1/2;\ -1;\ 0)$ y su radio $r=1/2$.

346. Escribir la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A\,(1;\ 2;\ -4)$, $B\,(1;\ -3;\ 1)$ y $C\,(2;\ 2;\ 3)$ si su centro se encuentra en el plano xOy.

Resolución. Como los puntos A, B y C pertenecen a la esfera $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ cuyo centro se encuentra en el plano xOy (de donde $c=0$), las coordenadas de estos puntos deben convertir la ecuación buscada en identidad; por eso obtenemos las ecuaciones

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2,\qquad (1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2.$$

De donde,

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(-3-b)^2+1,$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9,$$

o bien,

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15,\qquad \text{o sea},\qquad 10b=10;$$
$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7,\qquad \text{o sea},\qquad 2a=-4.$$

De suerte que $a=-2$, $b=1$. Por consiguiente, el centro de la esfera es el punto $C\,(-2;\ 1;\ 0)$. Luego hallamos $r^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26$. De este modo, la ecuación buscada tiene la forma

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

347. Hallar las coordenadas del centro y del radio de la circunferencia

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

Resolución. Desde el centro de la esfera $C\,(3;\ -2;\ 1)$ bajamos al plano $2x-2y-z+9=0$ la perpendicular cuya ecuación se puede escribir de la forma

$$(x-3)/2=(y+2)/(-2)=(z-1)/(-1)\qquad (*)$$

(en calidad de vector director de esta perpendicular se puede tomar el vecto normal del plano dado).

Ahora encontremos las coordenadas del punto de intersección de la recta $(*)$ con el plano $2x-2y-z+9=0$. Este punto es precisamente el centro de la circunferencia que resulta de la sección de la esfera por el plano dado.

Escribiendo las ecuaciones de la recta en la forma paramétrica: $x=2t+3$; $y=-2t-2$, $z=-t+1$ y sustituyendo x, y, z en la ecuación del plano obtenemos

$$2\,(2t+3)-2\,(-2t-2)-(-t+1)+9=0,\qquad \text{o sea},\qquad t=-2.$$

Por lo tanto, $x = 2(-2) + 3 = -1$, $y = -2(-2) - 2 = 2$, $z = -(-2) + 1 = 3$, o sea, el centro de la circunferencia se encuentra en el punto $C_1(-1;\ 2;\ 3)$.

Hallamos ahora la distancia d del centro de la esfera $C(3;\ -2;\ 1)$ al plano $2x - 2y - z + 9 = 0$:

$$d = \frac{2\cdot 3 + 2\cdot 2 - 1 + 9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6.$$

El radio de la circunferencia r se determina por la igualdad $r^2 = R^2 - d^2$, donde R es el radio de la esfera. Así, pues, $r^2 = 100 - 36 = 64$, o sea, $r = 8$.

348. Hallar las coordenadas de los centros y los radios de las esferas *definidas por las ecuaciones:* 1) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$; 3) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 3z + 2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$; 5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$.

349. ¿Cómo está situado el punto $M(1;\ -1;\ 3)$ respecto a las esferas que se dan a continuación? 1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 19$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 0$?

350. Escribir la ecuación de una esfera si los puntos $M(4;\ -1;\ -3)$ y $N(0;\ 3;\ -1)$ son los extremos de uno de sus diámetros.

351. Escribir la ecuación de la circunferencia que se forma en la sección de la esfera $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$ por el plano de ordenadas $z = 0$.

352. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, $2x + 2y - z = 18$.

Superficies cilíndricas y cono de segundo orden. La ecuación que tiene la forma $F(x,\ y) = 0$ define en el espacio una superficie cilíndrica en la cual las generatrices son paralelas al eje Oz. Análogamente, la ecuación $F(x,\ z) = 0$ determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y $F(y,\ z) = 0$, una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Ox.

Las ecuaciones canónicas de los cilindros de segundo orden son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \textit{para el cilindro elíptico},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \textit{para el cilindro hiperbólico},$$

$$y^2 = 2px, \quad \textit{para el cilindro parabólico}.$$

Las generatrices de los tres cilindros definidos por estas ecuaciones son paralelas al eje Oz y de directriz sirve la respectiva curva de segundo orden (elipse, hipérbola, parábola) que está en el plano xOy.

Hay que recordar que una curva puede ser representada en el espacio para*métricamente, o bien en forma de la línea de intersección de dos superficies.* Por ejemplo, las ecuaciones de la elipse en el plano xOy tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

La ecuación de un *cono de segundo orden* que tiene por vértice el origen de las coordenadas y de cuyo eje sirve el eje Oz se escribe de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Análogamente,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

son ecuaciones de segundo orden que tienen por vértice el origen de las coordenadas y de cuyos ejes sirven los ejes Oy y Ox, respectivamente.

353. ¿Qué superficie se define en el espacio por las ecuaciones 1) $x^2=4y$; 2) $z^2=xz$?

Resolución. 1) La ecuación $x^2=4y$ define un cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas al eje Oz. De directriz de la superficie cilíndrica sirve la parábola $x^2=4y$, $z=0$.

2) La ecuación $z^2=xz$ puede ser representada de la forma $z(z-x)=0$ y se descompone en dos ecuaciones: $z=0$ y $z=x$, o sea, define dos planos: el plano xOy y el plano bisector $z=x$ que pasa por el eje Oy.

354. ¿En qué línea se interseca el cono $x^2+y^2-2z^2=0$ con el plano $y=2$?

Resolución. Eliminando y a partir del sistema de ecuaciones, obtenemos

$$x^2+4-2z^2=0, \quad \text{o bien} \quad z^2/2-x^2/4=1.$$

Por consiguiente, la línea buscada de intersección es una hipérbola que está en el plano $y=2$; su eje real es paralelo al eje Oz y el eje imaginario es paralelo al Ox.

355. Escribir la ecuación de una superficie cónica de cuyo vértice sirve el punto $M(0;\,0;\,1)$ y de directriz, la elipse $x^2/25\times y^2/9=1$, $z=3$.

Resolución. Escribimos la ecuación de la generatriz AM, donde $A(x_0;\,y_0;\,z_0)$ es un punto que pertenece a la elipse. Las ecuaciones de esta generatriz tienen la forma $x/x_0=y/y_0=(z-1)/(z_0-1)$. Como el punto A pertenece a elipse, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de la elipse, o sea, $x_0^2/25+y_0^2/9=1$, $z_0=3$.

Eliminando ahora x_0, y_0 y z_0 a partir del sistema

$$x/x_0=(z-1)/(z_0-1), \quad y/y_0=(z-1)/(z_0-1),$$
$$x_0^2/25+y_0^2/9=1, \quad z_0=3,$$

obtenemos la ecuación del cono buscado

$$x^2/25+y^2/9-(z-1)^2/4=0.$$

356. Hallar y construir las superficies definidas por las ecuaciones: 1) $x^2+y^2=4$; 2) $x^2/25+y^2/16=1$; 3) $x^2-y^2=1$; 4) $y^2=2x$; 5) $z^2=y$; 6) $z+x^2=0$; 7) $x^2+y^2=2y$; 8) $x^2+y^2=0$; 9) $x^2-z^2=0$; 10) $y^2=xy$.

357. Escribir las ecuaciones de las líneas de intersección del cono $x^2-y^2+z^2=0$ con los planos: 1) $y=3$; 2) $z=1$; 3) $x=0$.

358. Escribir la ecuación de un cono que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyas directrices están definidas por las ecuaciones: 1) $x=a$, $y^2+z^2=b^2$; 2) $y=b$, $x^2+z^2=a^2$; 3) $z=c$, $x^2/a^2+y^2b^2=1$.

β. Superficies de revolución. Superficies de segundo orden. Si la curva $F(y, z) = 0$, $x = 0$ que está en el plano yOz gira alrededor del eje Oz, la ecuación de la superficie de revolución engendrada por ella tiene la forma

$$F(\sqrt{x^2+y^2},\ z) = 0.$$

Análogamente, la ecuación $F(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$ define la superficie engendrada por la revolución de la curva $F(x, y) = 0$, $z = 0$ en torno al eje Ox, y la ecuación $F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ determina la superficie engendrada por la revolución de la misma curva alrededor del eje Oy.

Citamos a continuación las ecuaciones de superficies de revolución de segundo orden engendradas por la rotación de una elipse, una hipérbola y una parábola en torno a sus ejes de simetría.

Elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz; el elipsoide se halla aplastado cuando $a > c$ y alargado cuando $a < c$ (cuando $a = c$, se convierte en esfera).

En el hiperboloide de revolución de una hoja:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz (que es el eje imaginario de la hipérbola por cuya revolución está engendrada esta superficie).

En el hiperboloide de revolución de dos hojas:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz (que es el eje real de la hipérbola por cuya revolución está engendrada esta superficie).

En el paraboloide de revolución

$$x^2+y^2=2pz;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz.

Las superficies de revolución de segundo orden son un caso particular de las superficies de segundo orden de forma general cuyas ecuaciones canónicas son las siguientes:

Elipsoide (de tres ejes):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\ q>0).$$

Además de estas cuatro superficies, de los tres cilindros (elíptico, hiperbólico y parabólico) y un cono, existe una superficie más de segundo orden llamada *paraboloide hiperbólico* cuya ecuación canónica tiene la forma

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Así, pues, en total existen nueve superficies diferentes de segundo orden.

359. Hallar la ecuación de la superficie obtenida por la revolución de la recta $x+2y=4$, $z=0$ alrededor del eje Ox.

Resolución. La superficie de revolución es un cono que tiene por vértice el punto M (4; 0; 0). Supongamos que un punto arbitrario A de la superficie buscada tiene las coordenadas X, Y, Z; a él le corresponde en la recta dada un punto B (x, y; 0). Los puntos A y B están en un mismo plano que es perpendicular al eje de revolución Ox. Entonces $X=x$, $Y^2+Z^2=y^2$.

Sustituyendo las expresiones para x e y en la ecuación de la recta dada, obtenemos las ecuaciones de la superficie de revolución buscada:

$$X+2\sqrt{Y^2+Z^2}=4, \text{ o sea, } 4(Y^2+Z^2)-(X-4)^2=0,$$

o bien, $4Y^2+4Z^2-(X-4)^2=0$.

360. ¿Qué superficie define la ecuación $x^2=yz$?

Resolución. Efectuamos el giro de los ejes de las coordenadas alrededor del eje Ox en un ángulo $\alpha=45°$ (del eje Oy al eje Oz en el sentido contrario al de las agujas del reloj). Las fórmulas de transformación de las coordenadas son: $x=x'$, $y=y'\cos\alpha-z'\operatorname{sen}\alpha$, $z=y'\operatorname{sen}\alpha+z'\cos\alpha$. Como $\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, entonces $x=x'$, $y=(\sqrt{2}/3)(y'-z')$, $z=(\sqrt{2}/2)(y'+z')$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la superficie, obtenemos

$$x'^2=y'^2/2-z'^2/2, \quad \text{o bien,} \quad x'^2-y'^2/2+z'^2/2=0$$

(es un cono que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyo eje es el eje de ordenadas).

361. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de la recta $2y+z-2=0$, $x=0$ alrededor del eje Oz.

362. Hallar las ecuaciones de las líneas de intersección de la superficie $z=x^2-y^2$ por los planos $z=1$, $y=1$, $x=1$, $z=-1$.

363. ¿Qué superficies se definen por las ecuaciones: 1) $z=xy$, 2) $z^2=xy$?

Indicación: efectuar el giro en torno al eje Oz en un ángulo de 45°.

364. Hallar la ecuación de un paraboloide elíptico que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyo eje es el eje Oz, si sobre su superficie se dan dos puntos M (—1; —2; 2) y N (1; 1; 1).

365. Escribir la ecuación de un elipsoide de cuyos ejes de simetría sirven los ejes de las coordenadas, si sobre su superficie se dan los tres puntos A (3; 0; 0), B (—2; 5/3; 0) y C (0; —1; $2/\sqrt{5}$).

366. Hallar las ecuaciones de la línea de intersección de las superficies $z=2-x^2-y^2$ y $z=x^2+y^2$.

367. Investigar qué superficies define la ecuación $z^2+x^2=m(z^2+y^2)$ cuando: 1) $m=0$, 2) $0<m<1$; 3) $m>1$; 4) 4) $m<0$; 5) $m=1$.

4. Ecuación general de una superficie de segundo orden. La ecuación general de segundo grado con respecto a x, y, z, tiene la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0$$

Esta ecuación puede definir las siguientes superficies: esfera, elipsoide, hiperboloide de una o dos hojas, paraboloide elíptico o hiperbólico, superficie cilíndrica o cónica de segundo orden. Puede también determinar un conjunto de dos planos, un punto, una recta o incluso no tener sentido geométrico (definir una superficie «imaginaria»).

Cuando $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la ecuación general adquiere el aspecto

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

En este caso la ecuación se simplifica fácilmente con ayuda de una traslación paralela de los ejes de coordenadas lo que permite determinar de inmediato su sentido geométrico.

368. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0?$$

Resolución. La ecuación dada se puede escribir de la forma

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Descomponemos en sus factores el primer miembro de la ecuación:

$$(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0.$$

Ahora bien, la ecuación define un conjunto de dos planos

$$x + 2y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

369. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz + xy = 0?$$

Resolución. Multiplicando por 2, reescribimos la ecuación de la forma

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

o bien,

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Esta ecuación es satisfecha sólo por las coordenadas de los puntos para los cuales se cumplen las igualdades $x = y$, $y = z$, $x = z$. De este modo, la ecuación define la recta $x = y = z$.

370. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0?$$

Resolución. Reescribimos la ecuación de la forma

$$(x - y)^2 + 4(z - 1)^2 = -1.$$

Esta ecuación no tiene ningún sentido geométrico, ya que su primer miembro no puede ser una magnitud negativa para ningunos valores reales de x, y, z.

371. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

Resolución. Agrupamos los términos que tienen las mismas coordenadas:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Completando los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, obtenemos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36$$

o bien,

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$$

Efectuemos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen de las mismas el punto O' (1; 1; 1). Las fórmulas de transformación de las coordenadas tienen la forma $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$. Entonces la ecuación de la superficie se escribirá de la forma

$$4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36, \quad \text{o bien,} \quad x'^2/9 + y'^2/4 + z'^2 = 1.$$

Esta ecuación define un elipsoide; su centro se encuentra en el nuevo origen de coordenades y sus semiejes son iguales a 3, 2 y 1, respectivamente.

372. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$$

Resolución. Agrupamos los términos que contienen x e y:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z.$$

Completamos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16, \quad \text{o bien,}$$

$$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 = 2(z - 6).$$

Efectuemos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen el punto O' (2; 4; 6). Entonces $x = x' + 2$; $y = y' + 4$, $z = z' + 6$. Como resultado obtenemos la ecuación $x'^2 - y'^2 = 2z'$, que define un paraboloide hiperbólico.

373. ¿Qué superficie determina la ecuación

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0?$$

Resolución. Efectuando las transformaciones respectivas, obtenemos:

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 4(z^2 + 2z) = -4;$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 2z + 1) = -4 + 4 - 4 + 4;$$

$$4(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 4(z + 1)^2 = 0.$$

Efectuamos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen el punto O' (1; 2; —1). Las fórmulas de transformación de las coordenadas son $x = x' + 1$, $y = y' + 2$, $z = z' - 1$. Entonces la ecuación dada toma el aspecto

$$4x'^2 - y'^2 + 4z'^2 = 0, \quad \text{o bien,} \quad x'^2 - y'^2/4 + z'^2 = 0.$$

Esta es la ecuación de una superficie cónica.

Encontrar qué superficies definen las ecuaciones siguientes:

374. $x^2 - xy - xz + yz = 0$.

375. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$.

376. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$.

377. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

378. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$.

379. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

380. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

381. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

382. $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

Capítulo VI. Determinantes y matrices

§ 1. Concepto de determinante de n-ésimo orden

Un determinante de cuarto orden correspondiente a la tabla de elementos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Con ayuda de los determinantes de cuarto orden se puede introducir análogamente el concepto de determinante de quinto orden, etc.

Para determinantes de cualesquiera órdenes siguen vigentes las definiciones de menor y complemento algebraico de cierto elemento, así como los dos teoremas sobre los complementos algebraicos, enunciados para los determinantes de tercer orden.

De este modo, designando por M_{jk} el menor y por A_{jk} el complemento algebraico del elemento a_{jk} del determinante de n-ésimo orden (o sea, del elemento que se encuentra en la j-ésima fila y en la k-ésima columna de este determinante), tenemos

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}.$$

Sea D un determinante de n-ésimo orden. Desarrollándolo primeramente por los elementos de la j-ésima fila y luego por los elementos de la k-ésima columna, en virtud del primer teorema de los componentes algebraicos obtenemos

$$D = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn};$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Por otro lado, cuando $j \neq i$ y $k \neq l$, en virtud del segundo teorema de los complementos algebraicos tenemos

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0,$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Las propiedades de los determinantes de segundo y tercer orden formuladas en la pág. 43 son también válidas para los determinantes de cualquier orden.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

cuyo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se halla por las fórmulas

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \ldots; \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

En estas fórmulas D es el determinante del sistema y D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) es un determinante que se obtiene a partir del determinante del sistema sustituyendo la k-ésima columna (o sea, la columna de los coeficientes de la incógnita buscada) por la columna de los términos independientes:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

383. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Resolución. **Efectuamos las operaciones siguientes: 1) de los elementos de la primera fila restamos los triplos de los elementos de la segunda fila; 2) a los elementos de la tercera fila les sumemos los duplos de los elementos de la segunda fila; 3) de los elementos de la cuarta fila restamos los elementos de la segunda fila. Entonces el determinante inicial se transforma en otro que tiene la forma**

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrallemos este determinante **por** los elementos de la primera columna

$$D=-\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Adicionando a los elementos de la primera fila los de la tercera fila y sustrayendo de los elementos de la segunda fila los de la tercera fila, obtenemos

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante **por** los elementos de la primera columna

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}=70.$$

384. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Resolución. Sacamos del determinante los factores comunes de las columnas segunda, cuarta y quinta

$$D=2\cdot 2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restamos de los elementos de la segunda columna los de la primera:

$$D=20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera fila:

$$D=20.\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sumemos a los elementos de la segunda fila los de la primera y sacamos -2 (factor común de los elementos de la primera columna) fuera del determinante:

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sustraemos los elementos de la tercera fila de los de la segunda y sacamos 2 (factor común de los elementos de la primera fila) fuera del determinante:

$$D=-80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna:

$$D=-80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=640.$$

385. Hallar y a partir del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ y+2z+3t=20, \\ z+2t+3x=14, \\ t+2x+3y=12. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos el sistema en la forma

$$\begin{cases} x+2y+3z+0\cdot t=14, \\ 0\cdot x+y+2z+3t=20, \\ 3x+0\cdot y+z+2t=14, \\ 2x+3y+0\cdot z+t=12. \end{cases}$$

Hallamos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De los elementos de la segunda columna restamos los duplos de los elementos de la primera columna; y de los elementos de la tercera columna restemos los elementos triplicados de la primera.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

De los elementos de la segunda columna extraemos los duplos de los elementos de la primera; de los elementos de la tercera columna restamos los triplos de los elementos de la primera:

$$D=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -10\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & -10\\ 4 & -4\end{vmatrix}=2\,(8+40)=96.$$

Hallamos

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 14 & 3 & 0\\ 0 & 20 & 2 & 3\\ 3 & 14 & 1 & 2\\ 2 & 12 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

De los elementos de la tercera fila restemos los triples de los elementos de la primera; de los elementos de la cuarta fila restemos los duplos de los elementos de la primera fila:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 3\\ 0 & -14 & -8 & 2\\ 0 & -8 & -6 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ -14 & -8 & 2\\ -8 & -6 & 1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5 & 1 & 3\\ -7 & -4 & 2\\ -4 & -3 & 1\end{vmatrix}.$$

De los elementos de la primera fila sustraemos los triplos de los elementos de la tercera fila; de los elementos de la segunda fila restamos los duplos de los elementos de la tercera fila:

$$D_y=8\begin{vmatrix}17 & 10 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & -3 & 1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17 & 10\\ 1 & 2\end{vmatrix}=192.$$

De aquí

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{192}{96}=2.$$

386. Calcular el determinante

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}.$$

Resolución. Sustraemos de la segunda fila la primera multiplicada por a; de la tercera fila la segunda multiplicada por a; y de la cuarta fila la tercera también multiplicada por a.

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

Restamos de la segunda fila la primera multiplicada por b y de la tercera fila la segunda multiplicada por b:

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-bc & d^2-db\end{vmatrix}=$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix}=$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

No es difícil ver que el determinante examinado es igual a cero si, y sólo si, entre los números a, b, c, d los hay iguales.

Calcular los determinantes:

387. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$. **388.** $\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -2 & -4 & -8\\ -1 & -3 & -9 & -27\\ -1 & -4 & -16 & -64\end{vmatrix}$.

389. $\begin{vmatrix}10 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10\end{vmatrix}$.

390. $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$.

Resolver los sistemas de ecuaciones

391. $\begin{cases} y-3z+4t=-5,\\ x-2z+3t=-4,\\ 3x+2y-5t=12,\\ 4x+3y-5z=5.\end{cases}$ **392.** $\begin{cases} x-3y+5z-7t=12,\\ 3x-5y+7z-t=0,\\ 5x-7y+z-3t=4,\\ 7x-y+3z-5t=16,\end{cases}$

393. $\begin{cases} x+2y=5,\\ 3y+4z=18,\\ 5z+6u=39,\\ 7u+8v=68,\\ 9v+10x=55.\end{cases}$

§ 2. Transofrmaciones lineales y matrices

Con ayuda de las igualdades

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y'$$

los valores de las variables x e y se pueden expresar linealmente mediante los valores de las variables x' e y'. Estas igualdades suelen llamarse transformación lineal de las variables x' e y'. Ellas pueden también ser consideradas como transformación lineal de las coordenadas del punto (o del vector) sobre un plano.

La tabla

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz* de la *transformación lineal* en cuestión y el determinante

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de la transformación lineal*. En adelante supondremos que $D_A \neq 0$.

Se puede también examinar la transformación lineal de tres variables (o sea, para el espacio) *

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{13}z',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z',$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

son respectivamente, la matriz y el determinante de esta transformación.

Una matriz A se llama *regular* (no degenerada) si $D_A \neq 0$. Si $D_A = 0$, la matriz A es singular (degenerada).

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se denominan *matrices cuadradas de segundo y tercer orden*, respectivamente.

Para mayor generalidad varias definiciones se darán para las matrices de tercer orden; su aplicación a las matrices de segundo orden no representa dificultades.

---

* Con frecuencia se llama transformación lineal a las igualdades de una forma más general

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1,$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2,$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3.$$

Aquí se examina una transformación lineal para la cual $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. En el análisis funcional esta transformación lineal se denomina *operador lineal*.

Si los elementos de una matriz cuadrada satisfacen la condición $a_{mn} = a_{nm}$, la matriz se llama *simétrica*.

Dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

se consideran *iguales* ($A = B$) si, y sólo si, son iguales sus elementos correspondientes, o sea, cuando $a_{mn} = b_{mn}$ ($m, n = 1, 2, 3$).

Se denomina *suma* de dos matrices A y B a la matriz definida por la igualdad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Se llama producto de un número m por una matriz A a la matriz definida por la igualdad

$$m\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

El producto de dos matrices A y B se designa por el símbolo AB y se define por la igualdad

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

o sea, *el elemento del producto matricial que está en la i-ésima fila y k-ésima columna es igual a la suma de los productos de los elementos correspondientes de la i-ésima fila de la matriz A por la k-ésima columna de la matriz B.*

Hablando en general, la ley conmutativa no se cumple con respecto al producto de dos matrices: $AB \neq BA$.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de estas matrices.

Se llama *matriz nula* a la que tiene todos los elementos iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Si a esta matriz se le suma cualquier otra matriz A se obtiene: $A + 0 = A$.

Se denomina *matriz unidad* a la matriz

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar esta matriz, tanto por la izquierda como por la derecha, por la matriz A, se obtiene la matriz A: $EA = AE = A$. A una matriz unidad le corresponde la transformación lineal idéntica:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Toda matriz cuadrada A que sea regular ($D_A \neq 0$) tiene la denominada matriz inversa.

Una matriz B se dice *inversa* respecto a la matriz A si el producto AB es igual a la matriz unidad: $AB = E$.

Para la matriz inversa de A se adopta la connotación A^{-1}.

La matriz inversa se encuentra por la fórmula

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A \\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A \\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A \end{pmatrix},$$

donde A_{mn} es el *complemento algebraico* del elemento de la matriz a_{mn} en su determinante, o sea, el producto del menor de segundo orden, obtenido por el tachado de la m-ésima fila y n-ésima columna en el determinante de la matriz A, por $(-1)^{m+n}$.

Al multiplicar las matrices A y A^{-1} se cumple la ley conmutativa, o sea, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Se llama *matriz columna* a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

El producto AX se define por la igualdad

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

se puede escribir en la forma $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema tiene la forma $X = A^{-1}B$ (si $D_A \neq 0$).

Se denomina *ecuación característica* de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Las raíces de esta ecuación λ_1, λ_2, λ_3 se llaman *números característicos* de la matriz; son siempre reales si la matriz inicial es simétrica.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\,\xi_2+a_{23}\xi_3=0, \\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda)\,\xi_3=0, \end{cases}$$

en el cual λ adopta uno de los valores λ_1, λ_2, λ_3 y cuyo determinante, en virtud de esto, es igual a cero, define el triplete de números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$ correspondiente a este número característico.

Este conjunto de tres números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$ determina al vector $r=\xi_1 i+\xi_2 j+\xi_3 k$ llamado *vector propio* de una matriz.

394. Hallar la suma de dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

395. Hallar la matriz $2A+5B$ si

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolución. Tenemos

$$2A=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B=\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A+5B=\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

396. Hallar los productos de las matrices AB y BA si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3\,(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1 \\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0\,(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2\,(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3 \\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3 \\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

397. Hallar A^3 si $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolución. Hacemos

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

398. Dada la transformación lineal $x=x'+y'+z'$, $y=x'+y'$, $z=x'$, y los puntos en el sistema de coordenadas x', y', z': $(1;\ -1;\ 1)$, $(3;\ -2;\ -1)$, $(-1;\ -2;\ 3)$. Determinar las coordenadas de estos puntos en el sistema x, y, z.

Resolución. Sustituyendo las coordenadas de los puntos en las igualdades que definen la transformación lineal dada, obtenemos: si $x'=1$, $y'=-1$, $z'=1$, entonces $x=1$, $y=0$, $z=1$, o sea, $(1;\ 0;\ 1)$; si $x'=3$, $y'=-2$, $z'=-1$, entonces $x=0$, $y=1$, $z=3$, o sea, $(0;\ 1;\ 3)$; si $x'=-1$, $y'=-2$, $z=-3$ entonces $x=-6$, $y=-3$, $z=-1$, o sea, $(-6,\ -3;\ -1)$.

399. Escribir la transformación lineal del problema precedente para pasar de las coordenadas x, y, z a las coordenadas x', y', z'.

Resolución. Tenemos $x'=z$ (de la tercera igualdad); $y'=y-z$ (restamos de la segunda igualdad la tercera); $z'=x-y$ (restamos de la primera igualdad la segunda).

400. Dada la transformación lineal $x=x'+2y'$, $y=3x'+4y'$. ¿En qué puntos ella no cambia sus coordenadas?

Resolución. Hay que encontrar x e y, si $x=x'$, $y=y'$, o sea, $x=x+2y$, $y=3x+4y$. Por consiguiente, $x=x'=0$, $y=y'=0$.

401. ¿En qué puntos la transformación lineal $x=3x'-2y'$, $y=5x'-4y'$ no cambia sus coordenadas?

Resolución. Tenemos $x=3x-2y$, $y=5x-4y$. Por consiguiente, $x=y=x'=y'$, o sea, la transformación lineal no cambia sus coordenadas en los puntos $(t;\ t)$ con iguales coordenadas.

402. Hallar el valor del polinomio matricial $2A^2+3A+5E$ para

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ si E es la matriz unidad de tercer orden.

Resolución. Tenemos

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{pmatrix},\quad 2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},$$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix},\quad 5E=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

403. Se dan dos transformaciones lineales $x = a_{11}x' + a_{12}y'$, $y = a_{21}x' + a_{22}y'$ y $x' = b_{11}x'' + b_{12}y''$, $y' = b_{21}x'' + b_{22}y''$. Sustituyendo x' e y' de la segunda transformación en la primera, obtendremos una otra transformación lineal que expresa x e y por medio de x'' e y''. Mostrar que la matriz de la transformación obtenida es igual al producto de las matrices de la primera y segunda transformaciones.

Resolución. Tenemos

$$x = a_{11}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{12}(b_{21}x'' + b_{22}y'') =$$
$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,x'' + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,y'',$$
$$y = a_{21}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{22}(b_{21}x'' + b_{22}y'') =$$
$$= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,x'' + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,y''.$$

La matriz de la transformación lineal obtenida tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

o sea, es el producto de las matrices $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

404. Se da la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar su número característico y los vectores propios.

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } (5-\lambda)(3-\lambda)-8=0, \text{ o sea, } \lambda^2-8\lambda+7=0;$$

los números característicos son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Hallamos el vector propio, correspondiente al primer número característico, del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\,\xi_1' + 2\xi_2' = 0, \\ 4\xi_1' + (3-\lambda_1)\,\xi_2' = 0; \end{cases}$$

como $\lambda_1 = 1$, entonces ξ_1' y ξ_2' están vinculados por la relación $2\xi_1' + \xi_2' = 0$.

Haciendo $\xi_1 = \alpha$ (α es un número arbitrario), obtenemos $\xi_2' = -2\alpha$ y el vector propio correspondiente al número característico $\lambda_1 = 1$, es $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - 2\alpha\mathbf{j}$.

Hallamos el segundo vector propio. Temenos

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\,\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\,\xi_2'' = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo el vector de $\lambda_2 = 7$, llegamos a la relación $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, o sea, $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta$. De vector propio correspondiente al segundo número característico sirve $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$.

405. Hallar los números característicos y los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=8,$$

o sea,

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda)-1]+(-3+\lambda+1)+(1-5+\lambda)=0.$$

Después de efectuadas las transformaciones elementales, la ecuación se reduce a la forma $(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$, de donde $\lambda_1=2, \lambda_2=3, \lambda_3=6$.

Hallamos el vector propio correspondiente al número característico $\lambda_1=2$. Del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \xi_1'-\xi_2'+\xi_3'=0, \\ -\xi_1'+3\xi_2'-\xi_3'=0, \\ \xi_1'-\xi_2'+\xi_3'=0 \end{cases}$$

(una de las ecuaciones de este sistema es la consecuencia de las otras dos y puede ser eliminada) hallamos $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\xi_1'$. Suponiendo $\xi_1'=\alpha$, entonces $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\alpha$ y $\mathbf{r}_1'=\alpha\mathbf{i}-\alpha\mathbf{k}$.

Hallamos el vector propio correspondiente al valor $\lambda_2=3$. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\xi_2''+\xi_3''=0, \\ -\xi_1''+2\xi_2''-\xi_3''=0, \\ \xi_1''-\xi_2''=0 \end{cases}$$

(una de estas ecuaciones es la consecuencia de las otras dos). De aquí $\xi_1''=\xi_2''=\xi_3''=\beta$ y $\mathbf{r}_2=\beta\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$.

Hallamos el vector propio correspondiente al valor de $\lambda_3=0$. Conformamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3\xi_1'''-\xi_2'''+\xi_3'''=0, \\ -\xi_1'''-\xi_2'''-\xi_3'''=0, \\ \xi_1'''-\xi_2'''-3\xi_3'''=0 \end{cases}$$

(de nuevo una de las ecuaciones es la consecuencia de las otras dos). Resolviendo este sistema, hallamos $\xi_1'''=\gamma$, $\xi_2'''=-2\gamma$, $\xi_3'''=\gamma$ y $\mathbf{r}_3=\gamma\mathbf{i}-2\gamma\mathbf{i}+\gamma\mathbf{k}$.

De este modo los vectores propios de la matriz dada tienen la forma $\mathbf{r}_1=\alpha(\mathbf{i}-\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2=\beta(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_3=\gamma(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})$, donde α, β, γ son números arbitrarios distintos de cero.

406. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz inversa.

Resolución. Calculemos el determinante de la matriz A:

$$D_A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=27+2-24=5.$$

Hallamos los complementos algebraicos de los elementos de este determinante:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=9, \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-12, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7.$$

Por consiguiente,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

407. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16, \end{cases}$$

representándolo en forma de ecuación matricial.

Resolución. Escribimos el sistema en la forma $AX=B$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

La solución de la ecuación matricial tiene la forma $X=A^{-1}B$. Hallemos A^{-1}. Tenemos

$$D_A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6.$$

Calculamos los complementos algebraicos de los elementos de este determinante:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14, \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

De este modo,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126+70-208\\ -90-56+128\\ 18+14+16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $x=2$, $y=3$, $z=-2$.

408. Normalizar el vector $\mathbf{x}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$.

Resolución. Normalizar el vector $\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k}$ significa hallar el vector unitario del mismo sentido. Tal vector es

$$\mathbf{x}_0=(\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k})/\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}.$$

En el caso dado $\mathbf{x}_0=(3/13)\,\mathbf{i}+(4/13)\,\mathbf{j}+(12/13)\,\mathbf{k}$.

§ 3. Reducción de las ecuaciones generales de las curvas y superficies de segundo orden a la forma canónica

Las expresiones que tienen la forma

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

y

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

se llaman *formas cuadráticas* de dos o tres variables, respectivamente.

Las matrices simétricas

$$A_2^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \text{donde}\ a_{21}=a_{12},$$

y

$$A_3^{(3)}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\ \text{donde}\ a_{21}=a_{12},\ a_{31}=a_{13}\ \text{y}\ a_{32}=a_{23},$$

se denominan *matrices* de estas *formas*.

Con ayuda de la transformación lineal de variables las formas cuadráticas pueden ser transformadas en formas que no contienen los productos de nuevas variables (reducidas, como se dice, a la suma algebraica de los cuadrados); en otras palabras, la forma cuadrática de dos variables puede reducirse a la forma $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$, y la forma cuadrática de tres variables, a la forma $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$. En este caso los coeficientes λ_1, λ_2, λ_3 son los números característicos de las matrices de las formas respectivas.

La correspondiente transformación lineal de variables se puede hallar del modo siguiente: se determina un triplete (para la forma cuadrática de dos variables, un par) de los vectores propios ortogonales normalizados de dos en dos que corresponden a los números característicos λ_1, λ_2, λ_3:

$$\mathbf{e}_1=\alpha_1\mathbf{i}+\beta_1\mathbf{j}+\gamma_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_1=\alpha_2\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\gamma_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_3=\alpha_3\mathbf{i}+\beta_3\mathbf{j}+\gamma_3\mathbf{k}.$$

En virtud de la normalidad y ortogonalidad de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ deben cumplirse las identidades:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1;\quad i=1,\ 2,\ 3;\quad \alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=0,$$
$$i,\ j=1,\ 2,\ 3,\qquad i\neq j.$$

Entonces la matriz de la transformación de variables tiene la forma

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix};$$

con otras palabras, hay que poner

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\\ y&=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\\ z&=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z' \end{aligned}$$

(para el caso de dos variables todas las fórmulas se simplifican respectivamente.) Tal transformación de variables ha recibido el nombre de *transformación ortogonal lineal*: en este caso el determinante de la matriz S es igual a ± 1 : $D_S=\pm 1$.

La transformación ortogonal lineal se utiliza para reducir a la forma canónica la ecuación general, de una curva o superficie de segundo orden; en este caso, si se quiere mantener la orientación mutua de nuevos ejes de coordenadas, se impone sobre la matriz de la transformación S una condición adicional: $D_S=1$.

La reducción de la ecuación de una curva o superficie de segundo orden a la forma canónica se efectúa del modo siguiente:

a) se encuentra aquella transformación ortogonal lineal de coordenadas que reduzca la forma cuadrática de los términos de mayor grado de la ecuación de la curva o superficie a la suma de los cuadrados y se realiza en la ecuación la sustitución correspondiente. Como resultado de esta transformación se eliminan de la ecuación los términos que contienen los productos de las coordenadas;

b) efectuando luego una traslación paralela de nuevos ejes de coordenadas (en el espacio a veces hay que llevar a cabo, además, un giro adicional de dos ejes en uno de los planos de coordenadas), se reduce la ecuación a la forma canónica requerida.

409. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Resolución. En el caso dado la matriz de los términos de grado superior tiene la forma $A=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{vmatrix}$.

Escribimos la ecuación característica de la matriz:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \text{sea,}\quad \lambda^2-13\lambda+36=0.$$

Hallamos los números característicos $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$. Haciendo $\lambda_1=4$, para determinar el vector propio respectivo obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\xi_1+2\xi_2=0,\\ 2\xi_1+4\xi_2=0.\end{cases}$$

De aquí $\xi_1=-2\xi_2$; haciendo $\xi_2=-\alpha$, hallamos $\xi_1=2\alpha$ y $\mathbf{r}_1=\alpha\,(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Normalizamos el vector $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{e}_1=(2/\sqrt{5})\,\mathbf{i}-(1/\sqrt{5})\,\mathbf{j}.$$

Suponiendo $\lambda_2 = 9$, para determinar el segundo vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -4\eta_1 + 2\eta_2 = 0, \\ 2\eta_1 - \eta_2 = 0, \end{cases}$$

De aquí $\eta_2 = 2\eta_1$ y $\mathbf{r}_2 = \beta(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$. Normalizando, determinamos

$$\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{5})\,\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\,\mathbf{j}.$$

Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Utilizamos los vectores propios ortogonales normalizados para la construcción de la matriz de la transformación de las coordenadas

$$S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \quad D_S = 1$$

De aquí

$$x = (2/\sqrt{5})\,x' + (1/\sqrt{5})\,y', \qquad y = (-1/\sqrt{5})\,x' + (2/\sqrt{5})\,y'.$$

Con las expresionas halladas para x e y sustituimos en la ecuación de la curva

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) +$$
$$+ 8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) -$$
$$-56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0,$$

de donde, una vez suprimidos los paréntesis y reducidos los términos semejantes, obtenemos

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Notemos que en la ecuación transformada los coeficientes de x'^2 y y'^2 son (como era de esperar) los números característicos λ_1 y λ_2. Volvemos a escribir la ecuación de la forma

$$4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x'\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0.$$

Completamos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$4\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + 9\left(y'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5} - \frac{64}{5}\right) + 80 = 0,$$

o bien,

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 80 = 0,$$

o finalmente,

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

Efectuamos una traslación paralela de los ejes de coordenadas haciendo $x'' = x' - 1/\sqrt{5}$, $y'' = y' - 8/\sqrt{5}$; obtenemos

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36, \quad \text{o bien,} \quad x''^2/9 + y''^2/4 = 1$$

(es la ecuación canónica de una elipse).

410. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0.$$

Resolución. La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lambda^2 - 25\lambda = 0,$$

o sea, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$.

Si $\lambda = 0$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9\xi_1 + 12\xi_2 = 0, \\ 12\xi_1 + 16\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones se reduce a la ecuación $\xi_1/4 = \xi_2/(-3)$. Por consiguiente, de vector propio de la matriz sirve $\mathbf{r} = \alpha\,(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$, y cuando $\alpha = 1/5$ hallamos el vector propio normalizado $\mathbf{e}_1 = (4/5)\,\mathbf{i} - (3/5)\,\mathbf{j}$.

Si $\lambda = 25$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -16\eta_1 + 12\eta_2 = 0, \\ 12\eta_1 - 9\eta_2 = 0. \end{cases}$$

De un modo análogo encontramos de este sistema el segundo vector propio normalizado $\mathbf{e}_2 = (3/5)\,\mathbf{i} + (4/5)\,\mathbf{j}$ $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0)$.

La matriz de la transformación de las coordenadas tiene la forma

$$S = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \quad (D_S = 1);$$

las fórmulas de transformación son $x = (4/5)\,x' + (3/5)\,y'$, $y = (-3/5)\,x' + (4/5)\,y'$.

Al reescribir la ecuación de la curva de la forma

$$(3x + 4y)^2 - 230x + 110y - 225 = 0,$$

pasamos a las nuevas coordenadas:

$$25y'^2 - 230\left(\frac{4}{5}\,x' + \frac{3}{5}\,y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}\,x' + \frac{4}{5}\,y'\right) - 225 = 0.$$

Después de reducir los términos semejantes y simplificar dividiendo por 25 llegamos a la ecuación

$$y'^2 - 10x' - 2y' - 9 = 0.$$

La última ecuación puede ser reescrita de la forma $(y' - 1)^2 = 10\,(x' + 1)$. Efectuando una traslación paralela de los ejes, tomamos como nuevo origen de coordenadas el punto $O'\,(-1;\ 1)$. Finalmente llegamos a la ecuación canónica de la curva dada $y''^2 = 10x''$ (una parábola).

411. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0$.

Resolución. Aquí la matriz de los términos de grado superior de la ecuación de la superficie tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

los números característicos de la matriz se encuentran a partir de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que se reduce a la forma $(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$; de aquí hallamos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Para $\lambda = 2$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ -u_1 + 3u_2 - u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0. \end{cases}$$

Al valor indicado de λ le corresponde el vector propio $(\alpha; 0; -\alpha)$. Después de efectuar la normalización llegamos al vector $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2})\,\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\,\mathbf{k}$.

Para $\lambda = 3$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

De aquí hallamos el segundo vector propio normalizado $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3})\,\mathbf{i} + (1/\sqrt{3})\,\mathbf{j} + (1/\sqrt{3})\,\mathbf{k}$. Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Para $\lambda = 6$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -3w_1 - w_2 + w_3 = 0, \\ -w_1 - w_2 - w_3 = 0, \\ w_1 - w_2 - 3w_3 = 0. \end{cases}$$

De vector propio normalizado correspondiente (tercero) sirve $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6})\,\mathbf{i} - (2/\sqrt{6})\,\mathbf{j} + (1/\sqrt{6})\,\mathbf{k}$, ortogonal a los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Hallamos la matriz de la transformación de las coordenadas:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos las fórmulas de transformación de las coordenadas:

$$x = (1/\sqrt{2})\,x' + (1/\sqrt{3})\,y' + (1/\sqrt{6})\,z', \quad y = (1/\sqrt{3})\,y' - (2/\sqrt{6})\,z',$$
$$z = (-1/\sqrt{2})\,x' + (1/\sqrt{3})\,y' + (1/\sqrt{6})\,z'.$$

Sustituyendo las expresiones para x, y, z en la ecuación de la superficie, después de simplificar obtenemos

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 6\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{3}\,y' - 2\sqrt{6}\,z' - 10 = 0.$$

Los coeficientes de x'^2, y'^2, z'^2 son, como era de esperar, los números λ_1, λ_2, λ_3. Escribimos la ecuación de la forma

$$2\left(x'^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x'\right)+3\left(y'^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y'\right)+6\left(z'^2-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=10.$$

lo que, una vez completados los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, resulta

$$2\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y'-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(z'-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=24.$$

Efectuando una traslación paralela de los ejes de las coordenadas por las fórmulas $x'=x''+3/\sqrt{2}$, $y'=y''+2/\sqrt{3}$, $z'=z''+1\sqrt{6}$ y dividiendo la ecuación por 24, llegamos a la ecuación canónica del elipsoide $x''^2/12+y''^2/8+z''^2/4=1$.

412. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{pmatrix}$. ¿Qué matriz B hace falta adicionarle para obtener la matriz unidad?

413. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, hallar la suma de las matrices A^2+A+E.

414. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}10&20&-30\\0&10&20\\0&0&10\end{pmatrix}$, hallar la matriz inversa.

415. Se dan las dos transformaciones lineales

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z',\quad y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z',$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z';$$
$$x'=b_{11}x''+b_{12}y''+b_{13}z'',\quad y'=b_{21}x''+b_{22}y''+b_{23}z'',$$
$$z'=b_{31}x''+b_{32}y''+b_{33}z''.$$

Sustituyendo x', y', z' de la segunda transformación en la primera obtendremos la transformación lineal que expresa x, y, z por x'', y'', z''. Mostrar que la matriz de la transformación obtenida es igual al producto de las matrices de la primera y segunda transformaciones.

416. Hallar los números característicos y los vectores normalizados propios de la matriz $\begin{pmatrix}7&4\\5&6\end{pmatrix}$.

417. Hallar los números característicos y los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

418. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$.

419. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+4y=11, \\ 5y+6z=28, \\ x+2z=\ \ 7, \end{cases}$$

representándolo en la forma de ecuación matricial.

420. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

421. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

422. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0$.

Indicación: las fórmulas de transformación de las coordenadas son:

$$x=(1/\sqrt{3})\,x'+(1/\sqrt{6})\,y'+(1/\sqrt{2})\,z', \qquad y=-(1/\sqrt{3})\,x'+(2/\sqrt{6})\,y',$$
$$z=(1/\sqrt{3})\,x'+(1/\sqrt{6})\,y'-(1/\sqrt{2})\,z'.$$

423. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$.

Indicación: las fórmulas de transformación de las coordenadas son:

$$x=-(1/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{2})\,y'+(1/\sqrt{3})\,z', \qquad x'=x'';$$
$$y=-(2/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{3})\,z', \qquad y'=y''+1/\sqrt{2};$$
$$z=-(1/\sqrt{6})\,x'+(1/\sqrt{2})\,y'+(1/\sqrt{3})\,z', \qquad z'=z''+1/\sqrt{3}.$$

424. Dada la transformación lineal $x = 6x' + y' - 2z'$, $y = -18x' + 2y' + 6z'$, $z = 2x' + 2y'$. ¿De qué puntos son las coordenadas que se duplican como resultado de esta transformación?

425. Se dan dos transformaciones lineales:

$$x = x' + y' + 2z', \qquad y = x' + 2y' + 6z, \qquad z = 2x' + 3y';$$
$$x = 2x' + 2z', \qquad y = x' + 3y' + 4z', \qquad z = x' + 3y' + 2z'.$$

Hallar los puntos para los cuales cada una de estas transformaciones da el mismo resultado.

426. Hallar los puntos cuyas coordenadas no cambian al emplear la transformación lineal $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$, $y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$.

427. Hallar un conjunto de los puntos cuyas coordenadas cambian de lugar al emplear la transformación lineal $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$, $y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$.

§ 4. Rango de una matriz. Matrices equivalentes

Se da la matriz rectangular

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Escojamos en esta matriz k filas arbitrarias y k columnas arbitrarias ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$). El determinante de k-ésimo orden compuesto por los elementos de la matriz A situados en la intersección de las filas y columnas escogidas se llama *menor* de k-ésimo orden de la matriz A. La matriz A tiene $C_m^k \cdot C_n^k$ menores de k-ésimo orden.

Examinemos todos los menores de la matriz A distintos de cero. Se denomina *rango* de la matriz A el orden mayor del menor de esta matriz, distinto de cero. Si todos los elementos de la matriz son iguales a cero, el rango de esta matriz se toma igual a cero.

Todo menor de una matriz, distinto de cero, cuyo orden es igual al rango de esta matriz recibe el nombre de *menor básico* de la matriz.

El rango de la matriz A lo designamos por $r(A)$. Si $r(A) = r(B)$, las matrices A y B se dicen *equivalentes*. En este caso se escribe $A \sim B$.

Es útil tener en cuenta que el rango de una matriz no cambia al efectuar las *transformaciones elementales*. Por transformaciones elementales se entienden:

1) la sustitución de las filas por las columnas y la sustitución de las columnas por las filas respectivas;

2) la permutación de las filas de la matriz;

3) la eliminación de una fila con todos los elementos iguales a cero;

4) la multiplicación de cualquier fila por un número distinto de cero;

5) la adición de los elementos de una fila a los elementos correspondientes de otra.

428. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Resolución. Todos los menores de segundo y tercer orden de la matriz dada son iguales a cero, ya que los elementos, de las filas de estos menores son proporcionales. Al mismo tiempo, los menores de primer orden (los mismos elementos de la matriz) son distintos de cero. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a 1.

429. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Resolución. Tachando en esta matriz la segunda fila y luego las columnas segunda, tercera y cuarta obtenemos la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$ equivalente a la dada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de esta matriz es igual a 2.

430. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Resolución. Sumamos los elementos correspondientes de las filas primera y tercera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dividimos por 4 los elementos de la primera fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

De los elementos de la primera fila **restemos** los elementos correspondientes de la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tachamos la primera fila

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la última matriz es igual a 2, puesto que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Por consiguiente, el rango de la matriz dada también es igual a 2.

431. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolución. De los elementos de la cuarta columna sustraigamos los de la tercera columna:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Borramos la cuarta columna

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, el rango de la matriz es igual a 3.

432. Determinar el rango y hallar los menores básicos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; r(A) = 2.$$

Los menores básicos son los de segundo orden de esta matriz, distintos de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Así, pues, la matriz A tiene 8 menores básicos.

433. ¿Cuántos menores de segundo orden tiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Escribirlos a todos.

Resolución. La matriz tiene $C_3^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ menores de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

434. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$.

435. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

436. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y hallar sus menores básicos.

437. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y hallar sus menores básicos.

§ 5. Investigación de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Se da un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Se llama *solución* de este sistema a un conjunto de n números $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \ldots; \bar{x}_n)$ los cuales, una vez sustituidos en lugar de las incógnitas en las ecuaciones, convierten en identidades estas últimas. Un sistema de ecuaciones se llama *compatible* si tiene, por lo menos, una solución $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n)$. Si un sistema no tiene ninguna solución, se denomina *incompatible*.

Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una sola solución e *indeterminado* si tiene más de una solución.

Las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

han recibido, respectivamente, los nombres de *matriz* y de *matriz ampliada del sistema* (1).

Para la compatibilidad del sistema **(1)** ***es necesario y suficiente que el rango de la matriz del mismo sea igual al rango de su matriz ampliada (teorema de Kronecker — Capelli)***. De este modo, el sistema (1) es compatible si, y sólo si, $r(A)=r(A_1)=r$. En este caso el número r se llama *rango del sistema* (1).

Si $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, el sistema de ecuaciones lineales (1) se denomina *homogéneo*. Un sistema homogéneo de ecuaciones es siempre compatible.

Si el rango de un sistema compatible es igual al número de incógnitas (o sea, $r=n$), el sistema es determinado.

Pero si el rango de un sistema compatible es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado. Detengámonos en el último caso. Supongamos que el sistema (1) es compatible y $r<n$. Examinemos un menor básico cualquiera de la matriz A. Escojemos en este menor una fila arbitraria. Los elementos de esta fila son los coeficientes de r incógnitas en una de las ecuaciones del sistema (1). A estas r incógnitas las llamamos *incógnitas básicas* del sistema de ecuaciones dado. Las demás $n-r$ incógnitas del sistema (1) las denominaremos *incógnitas independientes*.

Escogemos en el sistema (1) un sistema de r ecuaciones entre cuyos coeficientes se contienen los elementos del menor básico. Dejemos las incógnitas básicas del sistema escogido en los primeros miembros de las ecuaciones y transponemos a los segundos miembros los términos que contienen incógnitas independientes. En el sistema de ecuaciones obtenido expresemos las incógnitas básicas por medio de las independientes (por ejemplo, por las fórmulas de Cramer).

Ahora bien, asignando a las incógnitas independientes valores arbitrarios se pueden hallar los respectivos valores de las incógnitas básicas. Por lo tanto (de esto ya hemos hablado anteriormente) el sistema (1) tiene un conjunto innumerable de soluciones.

438. Investigar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2, \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4. \end{cases}$$

Resolución. Determinemos los rangos de la matriz y de la matriz ampliada del sistema. Escribimos la matriz ampliada

$$A_1=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Con la raya vertical hemos separado los elementos de la matriz del sistema (de la matriz A) de los términos independientes del sistema.

Adicionamos a los elementos de la segunda fila los elementos correspondientes de la tercera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Dividimos todos los elementos de la segunda fila por 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Restamos de los elementos de la segunda fila los elementos correspondientes de la primera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver que $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, o sea, $r(A) \neq r(A_1)$; por consiguiente, el sistema es incompatible.

439. Investigar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Resolución. La matriz ampliada del sistema tiene la forma

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Adicionamos los elementos de la segunda fila a los elementos correspondientes de las filas primera y cuarta;

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dividamos los elementos de la primera fila por 4 y los de la cuarta fila por 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Restamos de los elementos de la tercera fila los elementos correspondientes de la primera fila y de los elementos de la quinta fila los de la cuarta:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Borramos las filas tercera y quinta:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right); \qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos el determinante de la última matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \neq 0.$$

Por consiguiente, $r(A) = 3$. El rango de la matriz ampliada también es igual a 3, ya que el determinante hallado es menor de la matriz A_1.

De este modo, el sistema es compatible. Para su resolución tomemos, por ejemplo, la primera, tercera y quinta ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 \qquad = 3. \end{cases}$$

De aquí hallamos fácilmente que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $x_3 = 3$.

440. Investigar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Resolución. Tenemos

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Restamos de la tercera fila la primera:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Dividimos los elementos de la tercera fila por 2 y restamos luego de ella la segunda fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Borramos la tercera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

No es difícil ver que $r(A) = r(A_1) = 2$. Por consiguiente, el sistema es compatible.

Tomamos la primera y segunda ecuaciones del sistema dado:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Adoptamos como básicas las incógnitas x_1 y x_2. Esto se puede hacer, puesto que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ formado por los coeficientes de estas incógnitas es distinto de cero. De incógnitas independientes sirven x_3 y x_4. Excribiendo el sistema de la forma

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

expresamos x_1 y x_2 por medio de x_3 y x_4:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Haciendo $x_3 = u$, $x_4 = v$, obtenemos la solución del sistema de la forma

$$x_1 = -\frac{6}{11}u + \frac{8}{11}v - \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \quad x_3 = u, \; x_4 = v.$$

Asignando a u y v diferentes valores númericos obtendremos distintas soluciones del sistema de ecuaciones dado.

Investigar los sistemas de ecuaciones:

441. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

442. $\begin{cases} x_1 + \ 5x_2 + \ 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + \ 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$

443. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

§ 6. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss

La solución numérica de las ecuaciones algebraicas lineales con ayuda del determinante es cómoda para un sistema de dos y tres ecuaciones. Sin embargo, en caso de un número mayor de ecuaciones es mucho más ventajoso utilizar el *método de Gauss* que consiste en la eliminación consecutiva de las incógnitas. Aclaremos la esencia de este método tomando a título de ejemplo un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & \text{(a)} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & \text{(b)} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & \text{(c)} \\ a_{41}x + a_{32}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}, & \text{(d)} \end{cases}$$

Supongamos que $a_{11} \neq 0$ (si $a_{11} = 0$, cambiamos el orden de ecuaciones eligiendo como primera ecuación una en la cual el coeficiente de x no sea igual a cero).

Primer paso: dividimos la ecuación (a) por a_{11}, multiplicamos la ecuación obtenida por a_{21} y la restamos de (b); luego multiplicamos por a_{31} y restamos de (c); por último, multiplicamos por a_{41} y restamos de (d). Como resultado del primer paso llegamos al sistema

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, & \text{(e)} \\ \qquad b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25}, & \text{(f)} \\ \qquad b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35}, & \text{(g)} \\ \qquad b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u_4 = b_{45}, & \text{(h)} \end{cases}$$

Con ello b_{ij} se obtiene a partir de a_{ij} por las fórmulas siguientes:

$$b_{1j} = a_{1j}/a_{11} \quad (j = 2,\ 3,\ 4,\ 5);$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i = 2,\ 3,\ 4; \quad j = 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Segundo paso: procedemos con las ecuaciones (f), (g), (h) del mismo modo que con las ecuaciones (a), (b), (c), (d), etc. En resumidas cuentas el sistema inicial se transforma reduciéndose a la llamada forma «escalonada»:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, \\ \qquad y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25}, \\ \qquad\qquad z + d_{34}u = d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad u = e_{45}. \end{cases}$$

A partir del sistema transformado todas las incógnitas se determinan sucesivamente sin dificultad.

444. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 36,47x+\ 5,28y+\ 6,34z=12,26, & \text{(a)}\\ 7,33x+28,74y+\ 5,86z=15,15, & \text{(b)}\\ 4,63x+\ 6,31y+26,17z=25,22. & \text{(c)}\end{cases}$$

Resolución. Dividiendo la ecuación (a) por 36,47, obtendremos

$$x+0,1447y+0,1738z=0,3361. \qquad (*)$$

Multiplicamos la ecuación (*) por 7,33 y el resultado lo restamos de (b); obtenemos

$$27,6793y+4,586z=12,6864;$$

ahora multiplicamos la ecuación (*) por 4,63 y el resultado lo restamos de (c): obtenemos

$$5,64y+25,3653z=23,6639.$$

Así, pues, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 27,6793y+4,586z=12,6864, & \text{(d)}\\ 5,64y+25,3653z=23,6639. & \text{(e)}\end{cases}$$

Dividiendo la ecuación (d) por 27,68, tenemos

$$y+0,1657z=0,4583. \qquad (**)$$

Multiplicando la ecuación (**) por 5,64 y restando de (e), obtenemos $24,4308z = 21,0791$. Por lo tanto, $z=0,8628$. Entonces

$$y=0,4583-0,1657\cdot 0,8628=0,3153,$$

$$x=0,3361-0,1447\cdot 0,3153-0,1738\cdot 0,8628=0,1405.$$

De este modo, $x=0,1405$, $y=0,3153$, $z=0,8628$.

Prácticamente es más cómodo reducir a la forma escalonada, no el mismo sistema de ecuaciones sino la matriz compuesta por los coeficientes de las incógnitas y por los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26\\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15\\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22\end{array}\right).$$

Introduzcamos una quinta columna o sea, la llamada *columna de control*, cada elemento de la cual es la suma de los cuatro elementos de la fila dada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35\\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08\\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33\end{array}\right).$$

Al efectuar las transformaciones lineales de los elementos de la matriz, *también deben someterse a la misma transformación* los elementos de la columna de control. No es difícil ver que cada elemento de la columna de control de la matriz transformada es igual a la suma de los elementos de la fila correspondiente. El paso de una matriz a la otra lo escribimos con ayuda del signo de equivalencia:

$$\begin{pmatrix} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 27,6793 & 4,586 & 12,6864 & 44,9516 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 24,4308 & 21,0791 & 45,5094 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8628 & 1,8629 \end{array}\right).$$

Según la matriz obtenida escribimos el sistema transformado y hallamos la solución:

$$z = 0,8628,$$
$$y = 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153,$$
$$x = 0,3361 - 0,1738 \cdot 0,8628 - 0,1447 \cdot 0,3153 = 0,1405.$$

Si un sistema tiene solución única, la forma escalonada del sistema de ecuaciones se reducirá a la triangular, es decir que la última ecuación del sistema contiene una sola incógnita. En caso de un sistema indefinido, o sea, cuando el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones linealmente independientes, y admite por eso un conjunto innumerable de soluciones, la forma triangular del sistema no se obtiene, puesto que la última ecuación contiene más de una incógnita.

Cuando un sistema de ecuaciones es incompatible, una vez reducido a la forma escalonada, él contiene al menos una ecuación en forma de $0 = 1$, o sea, una ecuación en que todas las incógnitas tienen coeficientes nulos y el segundo miembro es distinto de cero. Un sistema así no tiene solución.

445. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Resolución. Transformamos la matriz en matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

(para simplificar los cálculos hemos permutado las dos primeras ecuaciones).
Restamos de las otras dos filas la primera multiplicada por 3 y por 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Cambiando los signos en la segunda fila y multiplicándola por 5, adicionamos el resultado a la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(hemos dividido por -11 la última fila)
El sistema de ecuaciones se ha reducido a la forma triangular:

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ y-4z=-5, \\ z=2. \end{cases}$$

El mismo tiene solución única. De la última ecuación tenemos $z=2$; sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos $y=3$ y, por último, en la primera ecuación hallamos $x=-1$.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

446. $$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$$

447. $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ x_1-x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

448. $$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_5=18, \\ 2x_1-5x_2+x_4+x_5=-7, \\ x_1-x_4+2x_5=8, \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=10, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$$

449. $$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+8x_2-x_3=8, \\ 9x_1+x_2+8x_3=0. \end{cases}$$

450. $$\begin{cases} 0{,}04x-0{,}08y+4z=20, \\ 4x+0{,}24y-0{,}08z=8, \\ 0{,}09x+3y-0{,}15z=9. \end{cases}$$

451. $$\begin{cases} 3{,}21x+0{,}71y+0{,}34z=6{,}12, \\ 0{,}43x+4{,}11y+0{,}22z=5{,}71, \\ 0{,}17x+0{,}16y+4{,}73z=7{,}06. \end{cases}$$

§ 7. Aplicación del método de Jordan—Gauss a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con ayuda del método de Gauss ha sido examinado el método matricial con la columna de control, merced a lo cual el sistema de ecuaciones dado se reducía a la forma triangular (véase las págs. 112, 113). Para la exposición ulterior es importante familiarizarse con el *método modificado de Jordan — Gauss* que permite encontrar directamente los valores de las incógnitas.

Sea dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right. \qquad (1)$$

En la matriz A de este sistema escogemos un elemento a_{qp} distinto de cero. Este elemento se llama *elemento resolutivo*, la p-ésima columna de la matriz A se denomina *columna resolutiva* y la q-ésima fila, *fila resolutiva*.

Examinamos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{array}\right. \qquad (2)$$

con la matriz A' cuyos coeficientes y términos independientes se determinan por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{ip}\cdot a_{qj}}{a_{qp}} \\ b'_i=b_i-\dfrac{a_{ip}\cdot b_q}{a_{qp}} \end{array}\right\}, \quad \text{si} \quad i\neq q.$$

En particular, $a'_{ip}=0$ si $i\neq q$. Si $i=q$, tomamos $a_{qj}=a'_{qj}$, $b'_q=b_q$. Pues bien, las q-ésimas ecuaciones en los sistemas (1) y (2) son iguales y los coeficientes de x_p en todas las ecuaciones del sistema (2), excepto en la q-ésima, son iguales a cero.

Hay que tener en cuenta que los sistemas (1) y (2) son simultáneamente compatibles o incompatibles. En caso de compatibilidad estos sistemas son equivalentes (sus soluciones coinciden).

Para determinar el elemento a'_{ij} de la matriz A' es útil tener en cuenta la llamada «regla del rectángulo».

Examinemos 4 elementos de la matriz A: a_{ij} (elemento que se somete a la transformación), a_{qp} (elemento resolutivo) y los elementos a_{ip} y a_{qj}. Para hallar el elemento a'_i se necesita restar del elemento a_{ij} el producto de los elementos a_{ip} y a_{qj}, situados en los vértices opuestos del rectángulo, dividido por el elemento resolutivo a_{qp}:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \text{------} & a_{ip} \\ | & & | \\ a_{qj} & \text{------} & a_{qp} \end{array}$$

De un modo análogo se puede transformar el sistema (2) tomando como elemento resolutivo de la matriz A' el elemento $a'_{sr}\neq 0$, ademas, $s\neq q$, $r\neq p$. Después de esta transformación todos los coeficientes de x_r, excepto a_{sr}, se anularán. El sistema obtenido puede ser nuevamente transformado, etc. Si

$r = n$ (el rango del sistema es igual al número de incógnitas), entonces, efectuada una serie de transformaciones, llegaremos al sistema de ecuaciones que tiene la forma

$$k_1x_1 = l_1,$$
$$k_2x_2 = l_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$k_nx_n = l_n,$$

a partir del cual se encuentran los valores de las incógnitas. El método descrito de resolución fundado en la eliminación sucesiva de las incógnitas se llama método de Jordan — Gauss.

452. Se da la matriz de un sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Al resolver este sistema con ayuda del método de Jordan—Gauss como elemento resolutivo se ha tomado $a_{23} = 3$. Hallar los elementos a'_{24}, a'_{13}, a'_{44} de la matriz transformada.

Resolución. Como a_{24} es un elemento de la fila resolutiva, $a'_{24} = a_{24} = 2$. El elemento a_{13} pertenece a la columna resolutiva; por eso $a'_{13} = 0$. El elemento a'_{44} se determina por la regla del rectángulo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24} \cdot a_{43}}{a_{23}} = -4 - \frac{2 \cdot 5}{3} = -7\,\frac{1}{3}.$$

453. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad - x_4 = -6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos los coeficientes, los términos independientes y las sumas de los coeficientes y de los términos independientes (Σ es la columna de control) en la tabla siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
$\boxed{1}$	1	—3	2	6	7
1	—2	0	—1	—6	—8
0	1	1	3		21
2	—3	2	0	6	7

Hemos tomado como elemento resolutivo el coeficiente de x_1 en la primera ecuación. Escribamos sin cambios la fila de la tabla que contiene este elemento (fila resolutiva) y a todos los elementos de la primera columna, excepto lo resolutivo, los sustituimos por ceros:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0					
0					
0					

Aplicando la regla del rectángulo, llenamos las casillas vacías de la tabla (la misma regla la aplicamos también a la columna $\sum$):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0	—3	3	—3	—12	—15
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Prestemos la atención a que en la columna de control se obtienen las sumas de los elementos de las filas respectivas. Dividiendo por —3 los elementos de la segunda fila obtenemos la tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0	$\boxed{1}$	—1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Tomamos como resolutivo el segundo elemento de la segunda fila. Escribimos sin cambios la primera columna; los elementos de la segunda columna excepto el resolutivo, los sustituimos por ceros; escribimos sin cambios la segunda fila (resolutiva); transformamos los elementos de las demás casillas de la tabla por la regla del rectángulo:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Dividimos los elementos de la tercera columna por 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	$\boxed{1}$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Transformamos la tabla tomando como resolutivo el tercer elemento de la tercera columna:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	1	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	—2	—4	—6

Dividimos los elementos de la cuarta fila por —2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Transformamos la tabla tomando como resolutivo el cuarto elemento de la cuarta fila:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	0	8	8
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

Finalmente obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=2, \end{cases}$$

o sea, $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

454. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+\ \ x_3+x_4=0, \\ 4x_1-\ \ x_2-\ \ x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la tabla:

$\boxed{1}$	1	−2	1	1	2
1	−3	1	1	0	0
4	−1	−1	−1	1	2
4	3	−4	−1	2	4

Al primer elemento de la primera columna lo tomamos como resolutivo:

1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	−1	5	−5	−2	−4

Cambiamos los signos en la cuarta fila:

1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	$\boxed{1}$	−4	5	2	4

El cuarto elemento de la segunda columna es resolutivo:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	20	7	14
0	0	−13	20	7	14
0	1	−4	5	2	4

Restemos de la tercera fila la segunda:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	20	7	14
0	0	0	0	0	0
0	1	−4	5	2	4

Se puede tachar la tercera fila:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	−4	5	2	4

El cuarto elemento de la segunda fila es resolutivo:

1	0	−0,6	0	0,4	0,8
0	0	−13	20	7	14
0	1	−0,75	0	0,25	0,5

La matriz tiene rango igual a 3, por consiguiente, el sistema contiene tres incógnitas básicas x_1, x_2 y x_4 y una incógnita independiente x_3. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2-0{,}6x_3+0\cdot x_4=0{,}4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2-13x_3+20x_4=7, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2-0{,}75x_3+0\cdot x_4=0{,}25. \end{cases}$$

De aquí,

$x_1 = 0{,}4 + 0{,}6x_3$, $\quad x_2 = 0{,}25 + 0{,}75x_3$, $\quad x_4 = 0{,}35 + 0{,}65x_3$.

De suerte que el sistema tiene la forma:

$x_1 = 0{,}4 + 0{,}6u$, $\quad x_2 = 0{,}25 + 0{,}75u$, $\quad x_3 = u$, $\quad x_4 = 0{,}35 + 0{,}65u$,

donde u es un número arbitrario.

455. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x-5y+7z+8t=3, \\ 3x+11y+2z+4t=6, \\ 3x+2y+3z+4t=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la tabla:

6	−5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

El cuarto elemento de la primera columna es resolutivo:

0	—11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	—1	4	6	17
0	—1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

El primer elemento de la tercera columna es resolutivo:

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	—1	0	4	1	4
1	12	0	—8	—3	2

Reemplazamos los signos de los elementos de la tercera fila por los contrarios:

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	—4
1	12	0	—8	—3	2

El tercer elemento de la segunda columna es resolutivo:

0	0	1	—36	—8	—43
0	0	0	0	6	6
0	1	0	—4	—1	—4
1	0	0	40	9	50

En resumen, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-36t=-8, \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot t=6, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-4\cdot t=-1, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+40t=9. \end{cases}$$

Es fácil ver que a la segunda ecuación no la satisfacen ninguno de los valores de x, y, z y t. *Así, pues, el sistema obtenido de ecuaciones y el sistema dado* son compatibles.

456. Aplicar el método de Jordan—Gauss para la determinación del rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Componemos la tabla.

7	—1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	—2	—1	—1	—1

En la última columna (de control) están escritas las sumas de los elementos de las filas respectivas. El segundo elemento de la primera columna es resolutivo:

0	—22	—32	—44	—98
1	3	5	7	16
0	—11	—16	—22	—49
0	—11	—16	—22	—49

Dividimos los elementos de la primera fila por -2:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	11	16	22	49
0	11	16	22	49

Restemos los elementos de la primera fila de los elementos correspondientes de las tercera y cuarta filas:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Tachando las dos últimas filas, obtenemos la tabla:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Todo determinante de segundo orden de la matriz obtenida es distinto de cero. Por consiguiente, $r(A)=2$.

Resolver los sistemas de ecuaciones valiéndose del método de Jordan—Gauss:

457. $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 8, \\ x_2+3x_2+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23. \end{cases}$$

458. $$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10. \end{cases}$$

459. $$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1, \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1-\ x_2-\ x_3-\ x_4=-2. \end{cases}$$

460. Determinar el rango de la matriz valiéndose del método de Jordan—Gauss

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Capítulo V. Fundamentos del álgebra lineal

§ 1. Espacios lineales

1. Conceptos principales. Examinemos un conjunto R de los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, en el cual, para dos elementos cualesquiera $\mathbf{x} \in R$ e $\mathbf{y} \in R$ está determinada la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R$ y para cualquier elemento $\mathbf{x} \in R$ y cualquier número real está determinado el producto $\lambda\mathbf{x} \in R$.

Si la adición de los elementos de un conjunto R y la multiplicación de un elemento de este conjunto por un número real satisface las condiciones siguientes:

1ª. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2ª. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3ª. existe un elemento $0 \in R$ (elemento nulo) tal, que $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in R$;

4ª. para cada elemento $\mathbf{x} \in R$ existe un elemento $\mathbf{y} \in R$ tal, que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 0$ (en adelante escribiremos $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, o sea, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$);

5ª. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

6ª. $\lambda (\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu) \mathbf{x}$;

7ª. $(\lambda + \mu) \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;

8ª. $\lambda (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,

entonces, el conjunto R se llama *espacio lineal* (o *vectorial*) y los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ de este espacio se denominan *vectores*.

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores geométricos es un espacio lineal, ya que para los elementos de este espacio están definidas las operaciones de adición y multiplicación por un número que satisfacen las condiciones enunciadas.

Se llama *diferencia* de dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de un espacio lineal a un vector $\mathbf{v}$ de este espacio tal, que $\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{x}$. La diferencia de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se designa por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, o sea, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{v}$. Se demuestra fácilmente que $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

Son justos también los teoremas siguientes:

1. *En cada espacio lineal existe un solo elemento nulo.*
2. *Para todo elemento de un espacio lineal existe un solo elemento contrario.*
3. *Para todo elemento* $\mathbf{x} \in R$ *se cumple la igualdad* $0 \cdot \mathbf{x} = 0$.
4. *Para todo número real* λ *y* $0 \in R$ *se cumple la igualdad* $\lambda \cdot 0 = 0$.
5. *De la igualdad* $\lambda\mathbf{x} = 0$ resulta una de dos igualdades: $\lambda = 0$ ó $\mathbf{x} = 0$.
6. *El elemento* $(-1) \cdot \mathbf{x}$ *es el contrario del elemento* $\mathbf{x}$.

461. Hay un conjunto de todos los posibles sistemas de números reales $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$ $(\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, ... La suma de dos elementos cualesquiera se define por la igualdad

$$(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n) = \\ = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n),$$

y el producto de cualquier elemento por un número cualquiera, por la igualdad

$$\lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n).$$

Demostrar que este conjunto es un espacio lineal.

Resolución. Designamos $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, ... Vamos a comprobar el cumplimiento de las ocho condiciones enunciadas anteriormente.

1ª. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n)$. $\mathbf{y} + \mathbf{x} = (\eta_1 + \xi_1; \eta_2 + \xi_2; \ldots; \eta_n + \xi_n)$, o sea, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

2ª. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n)$, $\mathbf{y} + \mathbf{z} = (\eta_1 + \zeta_1; \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \eta_n + \zeta_n)$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$. Así, pues, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

3ª. El elemento nulo es $\mathbf{0} = (0\ 0\ \ldots; 0)$. En efecto, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (\xi_1 + 0; \xi_2 + 0; \ldots; \xi_n + 0) = \mathbf{x}$.

4ª. El elemento $(-\xi_1; -\xi_2; \ldots; -\xi_n)$ es contrario al elemento $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, ya que $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + (-\xi_1; -\xi_2; \ldots; -\xi_n) = (0; 0; \ldots; 0) = \mathbf{0}$.

5ª. $1 \cdot \mathbf{x} = (1 \cdot \xi_1; 1 \cdot \xi_2; \ldots; 1 \cdot \xi_n) = \mathbf{x}$.

6ª. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda(\mu\xi_1; \mu\xi_2; \ldots; \mu\xi_n) = (\lambda\mu\xi_1; \lambda\mu\xi_2; \ldots; \lambda\mu\xi_n) = (\lambda\mu)\,\mathbf{x}$.

7ª. $(\lambda + \mu)\,\mathbf{x} = ((\lambda + \mu)\,\xi_1; (\lambda + \mu)\,\xi_2; \ldots; (\lambda + \mu)\,\xi_n) = (\lambda\xi_1 + \mu\xi_1; \lambda\xi_2 + \mu\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n + \mu\xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n) + (\mu\xi_1; \mu\xi_2; \ldots; \mu\xi_n) = \lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + \mu(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

8ª. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n) = (\lambda\xi_1 + \lambda\eta_1; \lambda\xi_2 + \lambda\eta_2; \ldots; \lambda\xi_n + \lambda\eta_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n) + (\lambda\eta_1; \lambda\eta_2; \ldots; \lambda\eta_n) = \lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + \lambda(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

462. Demostrar que el conjunto de todos los números complejos es un espacio lineal.

463. ¿Es un espacio lineal el conjunto de los sistemas de cuatro números reales $(\xi_1; \xi_2; 0; 0)$, $(\eta_1; \eta_2; 0; 0)$, $(\zeta_1; \zeta_2; 0; 0)$, donde $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ son números reales de toda clase? La adición de los elementos y su multiplicación por un número real están definidas al igual que en el problema 461.

464. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios $(\xi_1; \xi_2; 1; 1)$, $(\eta_1; \eta_2; 1; 1)$, $(\zeta_1; \zeta_2; 1; 1)$?

465. ¿Es un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios de segundo grado posibles $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$, $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$, $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2 + \ldots$?

466. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios cuyo grado no es superior al tercero?

467. Dadas las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ... ¿Es el conjunto de estas funciones un espacio lineal si ellas forman: 1) el conjunto de todas las funciones continuas en un segmento $[a, b]$; 2) el conjunto de todas las funciones derivables en un segmento $[a, b]$; 3) el conjunto de todas las funciones elementales; 4) el conjunto de todas las funciones no elementales?

468. Se da un conjunto de todos los pares posibles de números positivos: $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2)$, $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2)$. ¿Es este conjunto un espacio lineal si la adición de dos elementos se define por la igualdad $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1\eta_1; \xi_2\eta_2)$ y su multiplicación por un número real, por la igualdad $\lambda\mathbf{x} = (\xi_1^\lambda; \xi_2^\lambda)$?

469. ¿Puede un espacio lineal componerse: 1) de un solo vector; 2) de dos vectores diferentes?

470. A partir de un espacio lineal ha sido eliminado el vector **x**. ¿Puede el conjunto de los vectores obtenido después de esta eliminación quedarse un espacio lineal?

471. De un espacio lineal ha sido eliminado un conjunto innumerable de los vectores. ¿Puede el conjunto de los vectores obtenido después de esta eliminación ser un espacio lineal?

472. Los encargados de los coches-cama reciben cada día del almacén: 1) azúcar; 2) té; 3) galletas; 4) bizcochos; 5) carbón de leña, en calidad de reserva para el consumo sucesivo. Sean ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 los incrementos diarios respectivos de las cantidades (en kg) de estos ingresos. Si $\xi_i > 0$, del almacén se han suministrado cantidades mayores de alimento respectivo o carbón que las que han sido consumidos en este día y si $\xi_i < 0$, sus gastos son mayores que sus suministros del almacén.

¿Es el conjunto de sistemas de los números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3;\ \xi_4;\ \xi_5)$ un espacio lineal? ¿Qué significa el vector $(-100;\ 5;\ 0;\ -200;\ 3)$?

473. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de tres números enteros $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$?

474. Cada día llegan al depósito vagones de diferente tipo: furgones de equipajes y de correos, coches de tercera, segunda y primera clase, a partir de los cuales se forman diariamente y parten trenes de pasajeros, ordinarios y rápidos. Sean ξ_1; ξ_2; ξ_3; ξ_4; ξ_5 los incrementos diarios del número de vagones respectivos. ¿Es el conjunto de los números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3;\ \xi_4;\ \xi_5)$ un espacio lineal?

475. ¿Forman un espacio lineal todos los vectores geométricos que tienen por origen de las coordenadas y están situados en el primer octante?

476. Demostrar que el conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

forma un espacio lineal.

Indicación: demostrar que si $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ son las soluciones de este sistema, entonces $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ y $(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$ para cualquier λ también son las soluciones del sistema.

477. Demostrar que todas las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ . . ., que satisfacen la ecuación diferencial $A_0y^{(n)} + A_1y^{(n-1)} + A_ny = 0$ (A_0, A_1, . . ., A_n son funciones de x) forman un espacio lineal.

2. Vectores linealmente independientes. Sean **x**, **y**, **z**, . . ., **u** vectores cualesquiera de un espacio lineal R. El vector definido por la igualdad

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u},$$

donde α, β, γ, . . ., λ son números reales, también pertenece al espacio lineal R. Este vector se llama *combinación lineal* de los vectores **x**, **y**, **z**, . . ., **u**.

Supongamos que la combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ es el vector nulo, o sea,

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u} = 0. \qquad (1)$$

Si la igualdad (1) puede cumplirse también en el caso en que no todos los números $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sean iguales a cero, se dice que los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ *son linealmente dependientes.*

Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ se llaman *linealmente independientes* si la igualdad (1) se cumple sólo cuando $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$. Se demuestra fácilmente que los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ son linealmente independientes si, y sólo si, uno de estos vectores puede representarse en forma de la combinación lineal de los demás.

478. Mostrar que si entre los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ hay un vector nulo, los vectores en cuestión son linealmente dependientes.

Resolución. Sea $\mathbf{x} = 0$. Como la igualdad

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u} = 0$$

puede cumplirse cuando $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$, los vectores son linealmente dependientes.

479. Los sistemas de números reales ordenados $\mathbf{x}_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ son elementos de un espacio lineal. ¿Qué condición deben satisfacer los números ξ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$ para que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sean linealmente independientes, si la suma de los vectores y el producto de un vector por un número se definen por las igualdades $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k}; \ \xi_{2i} + \xi_{2k}; \ \ldots; \ \xi_{ni} + \xi_{nk})$, $\lambda x_i = (\lambda\xi_{1i}; \lambda\xi_{2i}; \ldots; \lambda\xi_{ni})$?

Resolución. Examinamos la igualdad $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$. Ella es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1\xi_{11} + \alpha_2\xi_{12} + \ldots + \alpha_n\xi_{1n} = 0, \\ \alpha_1\xi_{21} + \alpha_2\xi_{22} + \ldots + \alpha_n\xi_{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\xi_{n1} + \alpha_2\xi_{n2} + \ldots + \alpha_n\xi_{nn} = 0. \end{cases}$$

En caso de independencia lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ este sistema debe tener solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, o sea,

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

En particular, los vectores $(\xi_{11}; \xi_{21})$ y $(\xi_{12}; \xi_{22})$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} \neq 0$.

480. Se examina un espacio lineal de polinomios de un grado no superior al segundo. Demostrar que los vectores $\mathbf{P}_1 = 1 + 2t + 3t + 3t^2$, $\mathbf{P}_2 = 2 + 3t + 4t^2$ y $\mathbf{P}_3 = 3 + 5t + 7t^2$ son linealmente dependientes.

Resolución. En este caso se puede observar directamente que $\mathbf{P}_3 = 1 \cdot \mathbf{P}_1 + 1 \cdot \mathbf{P}_2$; por lo tanto, los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son linealmente dependientes.

481. ¿En qué caso los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$ definidos en el enunciado del problema 468 son linealmente dependientes?

Resolución. De la igualdad $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ se deduce que $(\xi_1;\ \xi_2) = \lambda\,(\eta_1;\ \eta_2)$, o bien $(\xi_1;\ \xi_2) = (\eta_1^\lambda;\ \eta_2^\lambda)$, o sea, $\xi_1 = \eta_1^\lambda$, $\xi_2 = \eta_2^\lambda$. De aquí sacamos la conclusión de que $\ln \xi_1 \cdot \ln \eta_2 = \ln \eta_1 \cdot \ln \xi_2$.

482. Demostrar que tres vectores coplanares **a**, **b** y **c** son linealmente dependientes.

Indicación: reducir los vectores a un origen común y descomponer uno de los vectores en componentes que sean colineales respectivamente a los componentes de los otros dos vectores.

483. Demostrar que tres vectores no coplanares **a**, **в** y **c**, son linealmente independientes.

484. Demostrar que cuatro vectores cualesquiera **a**, **b**, **c** y **d** son linealmente dependientes.

Resolución. Si tres de los cuatro vectores son coplanares, el problema se resuelve fácilmente. Supongamos que estos vectores no son coplanares. Llevamos los cuatro vectores a un origen común O. Construímos un paralelepípedo cuya diagonal sea el vector **d** con las aristas sobre las rectas que contienen **a**, **b** y **c**. No es difícil ver que $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

485. Demostrar que si n vectores de un espacio lineal $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ son linealmente dependientes, $n + 1$ vectores de este espacio $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, también son linealmente dependientes.

3. Dimensión y base de un espacio lineal. Si en un espacio lineal R hay n vectores linealmente independientes, pero $n + 1$ vectores cualesquiera de este espacio son linealmente dependientes, entonces el espacio R se llama *espacio n-dimensional*. Se dice también que la dimensión del espacio R es igual a n y se escribe $d\,(R) = n$. Un espacio en el cual se puede hallar una cantidad tan grande que se quiera de vectores linealmente independientes se denomina *espacio de dimensión infinita*. Si R es un espacio de dimensión infinita, entonces $d\,(R) = \infty$.

El conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio lineal n-dimensional se llama *base*. Es justo el *teorema* siguiente: *cada vector de un espacio lineal n-dimensional puede ser representado unívocamente en forma de una combinación lineal de los vectores de la base*. Así, si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, es la base de un espacio n-dimensional R, entonces todo vector $\mathbf{x} \in R$ puede ser unívocamente representado de la forma

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n.$$

De este modo, el vector **x** en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ se determina unívocamente con ayuda de los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Estos números se denominan *coordenadas* del vector **x** en la base dada.

Si $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \eta_n\mathbf{e}_n$, entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1)\,\mathbf{e}_1 + (\xi_2 + \eta_2)\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)\,\mathbf{e}_n,$$
$$\lambda\mathbf{x} = \lambda\xi_1\mathbf{e}_1 + \lambda\xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda\xi_n\mathbf{e}_n.$$

Para determinar la dimensión de un espacio lineal es útil tener en cuenta el siguiente *teorema*: *si todo vector de un espacio lineal R puede ser representado en forma de una combinación lineal de los vectores linealmente independientes* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *entonces* $d\,(R) = n$ (y, por consiguiente, *los vectores* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *forman la base en el espacio R*).

486. Se da un espacio lineal de todos los pares posibles de números reales ordenados $\mathbf{x}_1 = (\xi_{11};\ \xi_{21})$, $\mathbf{x}_2 = (\xi_{12};\ \xi_{22})$, $\mathbf{x}_3 = (\xi_{13};\ \xi_{23})$, . . ., con ello la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un número real están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k};\ \xi_{2i} + \xi_{2k})$; $\lambda\mathbf{x}_i = (\lambda\xi_{1i};\ \lambda\xi_{2i})$. Demostrar que los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 2)$ y $\mathbf{e}_2 = (3;\ 4)$ forman la base del espacio lineal dado. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (7;\ 10)$ en esta base.

Resolución. Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 2)$ y $\mathbf{e}_2 = (3;\ 4)$ son linealmente independientes (véase el problema 479). Consideramos un vector cualquiera $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$. Mostremos que para cualesquiera η_1 y η_2 se pueden determinar los números λ y μ, *de modo que se cumpla la igualdad* $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$, *o bien,* $(\eta_1;\ \eta_2) = (\lambda + 3\mu;\ 2\lambda + 4\mu)$.

No es difícil ver que existe un único par de valores $(\lambda;\ \mu)$ para el cual se cumple esta igualdad. Esto resulta del hecho de que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = \eta_1, \\ 2\lambda + 4\mu = \eta_2 \end{cases}$$

es determinado.

Y bien, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ forman la base. Hallemos las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (7;\ 10)$ en esta base. El problema se reduce a la determinación de λ y μ en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

De aquí obtenemos $\lambda = 1$, $\mu = 2$, o sea, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

487. Mostrar que el espacio lineal cuyos elementos son los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)$ (véase el problema 479) tiene por base el conjunto de los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, . . ., $\mathbf{e}_n = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$.

Resolución. No es difícil ver que

$$\mathbf{x} = \xi_1 (1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0) + \xi_2 (0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0) + \ldots + \xi_n (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1),$$

o sea, $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n$. Ahora bien, todo vector puede ser representado en forma de una combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. De este modo, estos vectores forman la base y el espacio R es n-dimensional.

488. ¿De qué elementos se compone un espacio lineal con la base $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$, si la adición de los elementos y la multiplicación de un elemento por un número real se entienden en el sentido ordinario?

489. Mostrar que el conjunto de todas las matrices de segundo orden es un espacio lineal de cuarta dimensión.

490. Mostrar que las matrices $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ forman la base del espacio lineal considerado en el problema 489.

491. Mostrar que los elementos $\mathbf{e}_1 = (1;\ 10)$ y $\mathbf{e}_2 = (10;\ 1)$ del espacio lineal examinado en el problema 468 son básicos. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (2;\ 3)$ en esta base.

Resolución. Como $\ln 1 \cdot \ln 1 - \ln 10 \cdot \ln 10 \neq 0$, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes (véase el problema 481). Supongamos que un vector cualquiera $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$ está representado en la forma de la combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Mostremos que existe tal par de números $(\lambda;\ \mu)$ para el cual se cumple la igualdad $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$, o bien $(\eta_1;\ \eta_2) = (1^{\lambda}\cdot 10^{\mu};\ 10^{\lambda}\cdot 1^{\mu})$. Por consiguiente, $\mu = \log \eta_1$, $\lambda = \log \eta_2$. En particular, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \log 3 + \mathbf{e}_2 \log 2$. De este modo, $(\log 3;\ \log 2)$ son las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

492. Mostrar que como base del espacio n-dimensional examinado en el problema 479, pueden tomarse los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{n-1} = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_n = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 1)$.

Indicación: examinar los vectores $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\ldots$, $\mathbf{e}'_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n$.

4. Isomorfismo de espacios lineales. Examinemos dos espacios lineales R y R'. Designamos los elementos del espacio R por $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ y los elementos del espacio R' por $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}', \ldots$.

Los espacios R y R' se llaman *isomorfos* si entre sus elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'$, se puede establecer tal correspondencia biunívoca $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$; $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}'$ para la cual $\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$, $\lambda\mathbf{x} \leftrightarrow \lambda\mathbf{x}'$ (λ es un número real cualquiera). Conviene señalar un teorema importante con cuya ayuda se determina fácilmente el isomorfismo de los espacios lineales de dimensión finita: *para que dos espacios de dimensión finita R y R' sean isomorfos es necesario y suficiente que sus dimensiones sean iguales.*

493. Se dan dos espacios lineales R y R'. Los elementos del espacio R son todas las posibles funciones derivables del argumento t que se anulan cuando $t = 0$. Al mismo tiempo los elementos del espacio R' son las funciones derivadas que pertenecen al espacio R. Demostrar que los espacios R y R' son isomorfos.

Resolución. Sean $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots$ las funciones del espacio R y $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots$ las funciones del espacio R'. Del hecho de que estas funciones están dotadas de índices no cabe deducir de que R y R' sean conjuntos numerables.

Sea $\varphi_i(t) = f'_i(t)$; entonces $f_i(t) = \int\limits_0^t \varphi_i(t)\,dt$. De este modo, entre los elementos de los espacios lineales R y R' (es el lector quien debe demostrar su linealidad) queda establecida la correspondencia biunívoca.

Con ayuda de las igualdades

$$\varphi_i(t) + \varphi_k(t) = [f_i(t) + f_k(t)]', \quad f_i(t) + f_k(t) =$$
$$= \int\limits_0^t [\varphi_i(t) + \varphi_k(t)]\,dt, \quad \lambda\varphi_i(t) = [\lambda f_i(t)]', \ \lambda f_i(t) = \int\limits_0^t \lambda\varphi_i(t)\,dt$$

quedan establecidas las correspondencias biunívocas:

$$f_i(t) + f_k(t) \leftrightarrow \varphi_i(t) + \varphi_k(t),$$
$$\lambda f_i(t) \leftrightarrow \lambda\varphi_i(t).$$

De suerte que R y R' son espacios isomorfos.

494. Demostrar que los conjuntos de todos los vectores geométricos y de los polinomios no superiores al segundo grado, son espacios lineales isomorfos.

495. Se dan los espacios lineales isomorfos R y R'. Entre los elementos de estos espacios se han establecido las correspondencias biunívocas $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}'$, ... Demostrar que $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{y}' + \gamma\mathbf{z}'$ para α, β y γ reales cualesquiera.

496. Sean R y R' espacios lineales isomorfos, además $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Demostrar que $(-\mathbf{x}) \leftrightarrow (-\mathbf{x}')$.

497. Se dan los espacios isomorfos R y R', siendo $\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}'$ los elementos nulos de estos espacios. Demostrar que $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}'$ independientemente de cómo están fijadas las correspondencias biunívocas entre otros elementos de estos espacios.

498. Se dan todos posibles pares de números reales: $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$, $(\xi_3; \eta_3)$, ... Se construyen dos espacios lineales: el espacio R con los elementos $\mathbf{x}_1 = (\xi_1; \eta_1)$, $\mathbf{x}_2\,(\xi_2; \eta_2)$, $\mathbf{x}_3 =$ $= (\xi_3; \eta_3)$, ... en el cual la adición de los vectores y la multiplicación de un vector por un número están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (\xi_1 + \xi_2; \eta_1 + \eta_2)$, $\lambda\mathbf{x}_1 = (\lambda\xi_1; \lambda\eta_1)$ y el espacio R' constituido por los vectores $\mathbf{x}_1' = (e^{-\xi_1}; e^{-\eta_1})$, $\mathbf{x}_2' = (e^{-\xi_2}; e^{-\eta_2})$, $\mathbf{x}_3' = (e^{-\xi_3}; e^{-\eta_3})$, ... en el cual las operaciones respectivas están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2' = (e^{-\xi_1-\xi_2}; e^{-\eta_1-\eta_2})$, $\lambda\mathbf{x}_1' =$ $= (e^{-\lambda\xi_1}; e^{-\lambda\eta_1})$. Demostrar que los espacios R y R' son isomorfos.

499. ¿Son isomorfos los espacios lineales R y R' si los elementos de R son los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ... y los elementos de R' son los vectores $2\mathbf{x}$, $2\mathbf{y}$, $2\mathbf{z}$, ...? Mostrar que los espacios R y R' están constituidos por los mismos elementos.

§ 2. Transformación de coordenadas al pasar a una base nueva

Supongamos que en un espacio lineal de n-dimensional R^n hay dos bases: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ (vieja) y $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \ldots$ (nueva). Se dan las dependencias que expresan cada vector de la nueva base en función de los vectores de la base vieja:

$$\mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n,$$
$$\mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n,$$
$$\mathbf{e}_n' = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n.$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de paso* de la vieja base a la nueva.

Tomamos un vector $\mathbf{x}$ cualquiera. Sean $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ las coordenadas de este vector en la vieja base y $(\xi_1'; \xi_2'; \ldots; \xi_n')$ sus coordenadas en la nueva base. Con ellos las viejas coordenadas del vector $\mathbf{x}$ se expresan por las nuevas coordenadas de este vector mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_{11}\xi'_1 + a_{12}\xi'_2 + \ldots + a_{1n}\xi'_n,\\ \xi_2 &= a_{21}\xi'_1 + a_{22}\xi'_2 + \ldots + a_{2n}\xi'_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi_n &= a_{n1}\xi'_1 + a_{n2}\xi'_2 + \ldots + a_{nn}\xi'_n\end{aligned}$$

que se llaman *fórmulas de transformación de las coordenadas.*

No es difícil ver que las columnas de la matriz A son las coordenadas en las fórmulas de paso de la vieja base a la nueva y las líneas de esta matriz son las coordenadas en las fórmulas de transformación de las viejas coordenadas por las nuevas.

500. Se da el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Descomponer este vector en la nueva base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4$ si $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Resolución. **Escribimos la matriz del paso de la base vieja a la nueva:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas de esta matriz son los coeficientes en las fórmulas de transformación de las coordenadas:

$$\xi_1 = \xi'_2 + \xi'_3 + \xi'_4, \quad \xi_2 = \xi'_1 + \xi'_3 + \xi'_4, \quad \xi_3 = \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_4, \quad \xi_4 = \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_3.$$

Como $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1$, entonces, una vez resuelto el sistema de ecuaciones, hallamos $\xi'_1 = \xi'_2 = \xi'_3 = \xi'_4 = 1/3$ y $\mathbf{x} = (1/3)(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4)$.

Se puede resolver el problema también de otro modo. Eliminando $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}'_1 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 0\cdot\mathbf{e}_4, \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}'_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}'_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}'_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{e}'_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hay que desarrollar este determinante por los elementos de la primera columna y expresar $\mathbf{x}$ en función de $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ y $\mathbf{e}'_4$.

Teniendo en cuenta las particularidades de este problema se puede proponer un procedimiento más para resolverlo. Como $\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4 = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4$, entonces $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = (1/3)(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4)$. De aquí $\mathbf{x} = (1/3)(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4)$.

501. Se da el vector $\mathbf{x} = 8\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 18\mathbf{e}_4$. Descomponer este vector en una nueva base vinculada con la vieja por las ecuaciones $\mathbf{e}_1' = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4$.

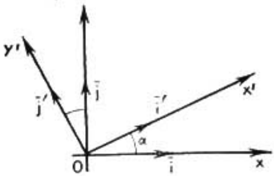


Fig. 21

502. Se da el vector $\mathbf{x} = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_n)$. Descomponer el vector $\mathbf{x}$ por la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$, si $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1}' + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1$.

503. El sistema de coordenadas xOy se ha girado alrededor del origen de las coordenadas en el ángulo α (fig. 21). Expresar las coordenadas del vector $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ en el nuevo sistema por medio de sus coordenadas en el viejo.

Resolución. Descomponemos los vectores $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$ en los versores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$;

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Escribimos la matriz de paso de la vieja base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a la base nueva $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos

$$x = x'\cos\alpha - y'\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad y = x'\,\mathrm{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha,$$

o sea,

$$x' = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad y' = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha.$$

504. Se dan las dependencias $\mathbf{e}_1' = \alpha\mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_2' = \beta\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = \gamma\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = \delta\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5' = \varepsilon\mathbf{e}_1$. Escribir las fórmulas que enlazan las viejas coordenadas $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ del vector $\mathbf{x}$ con las nuevas $(\xi_1'; \xi_2'; \xi_3'; \xi_4'; \xi_5')$ del mismo vector.

505. ¿Son posibles las dependencias $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ entre la vieja base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y la nueva $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$?

§ 3. Subespacios

1. Subespacio de un espacio lineal. Un espacio lineal R' se llama *subespacio* de un espacio lineal R si de elementos del espacio R' sirven sólo los del espacio R.

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores paralelos a un mismo plano es un subespacio de todos los vectores geométricos del espacio.

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$, son vectores cualesquiera de un espacio lineal R, entonces todos los vectores $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{u}$, donde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, son todos los números reales posibles, forman un subespacio del espacio R. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{u}$ se denomina *cápsula lineal* de los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{u}$ y se designa por $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{u})$.

Si R_1 es un subespacio de un espacio lineal R, entonces $d(R_1) \leqslant d(R)$.

Supongamos que en un espacio lineal R hay dos subespacios R_1 y R_2.

Se llama *intersección* de los subespacios R_1 y R_2 al conjunto R_3 de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a R_1 y R_2. La notación $R_3 = R_1 \cap R_2$

significa que R_3 es la intersección de los subespacios R_1 y R_2. Se denomina *suma* de los subespacios R_1 y R_2 al conjunto R_4 de todos los elementos que tiene la forma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ donde $\mathbf{x} \in R_1$ e $\mathbf{y} \in R_2$. La notación $R_4 = R_1 + R_2$ significa que el conjunto R_4 es la suma de los subespacios R_1 y R_2.

Se demuestra que la intersección R_3 y la suma R_4 son subespacios del espacio R. Conviene tener en cuenta que

$$d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4).$$

506. ¿Puede un subespacio de un espacio lineal R constar de un solo elemento?

507. Se da el espacio lineal R cuyos elementos son todos los posibles sistemas de números reales: $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$, $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$, ... La adición de dos elementos y la multiplicación de un elemento por un número están definidas por las igualdades

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \xi_3 + \eta_3; \xi_4 + \eta_4),$$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \lambda\xi_3; \lambda\xi_4).$$

Demostrar que el conjunto R_1 de los elementos $\mathbf{x}_1 = (0; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$, $\mathbf{y}_1 = (0; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$, $\mathbf{z}_1 = (0; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$, . . . y el conjunto R_2 de los elementos $\mathbf{x}_2 = (\xi_1; 0; \xi_3; \xi_4)$, $\mathbf{y}_2 = (\eta_1; 0; \eta_3; \eta_4)$, $\mathbf{z}_2 = (\zeta_1; 0; \zeta_3; \zeta_4)$ . . . son subespacios del espacio lineal R.

508. Hallar para el espacio lineal R examinado en el problema 507 la intersección R_3 y la suma R_4 de los subespacios R_1 y R_2.

509. Mostrar que para los subespacios examinados en los problemas 504 y 505 se cumple la igualdad $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$.

510. Se da un espacio lineal compuesto por todos los vectores geométricos. ¿Es el conjunto de los vectores que tienen por origen el origen de coordenadas y están situados en el primer octante un subespacio de este espacio?

511. Se da un espacio lineal R cuyos elementos son las coordenadas de los puntos $P(x; y; z)$ del primer octante que no están sobre los planos de coordenadas. La suma de dos elementos cualesquiera $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$ y $P_2 = (x_2; y_2; z_2)$ está definida por la igualdad $P_1 + P_2 = (x_1x_2; y_1y_2; z_1z_2)$ y la multiplicación de un elemento $P = (x; y; z)$ por un número real λ, mediante la igualdad $\lambda P = (x^\lambda; y^\lambda; z^\lambda)$. Demostrar que el conjunto R_1 de los puntos de este espacio que están situados sobre el plano $z = 1$ es un subespacio del espacio R.

512. Se da un espacio lineal R de los polinomios no superiores al quinto grado. Demostrar que el conjunto R_1 de los polinomios que tienen la forma $a_0t + a_1$ y el conjunto R_2 de los polinomios $b_0t^4 + b_1t^2 + b_2$ son subespacios del espacio R si la adición de los elementos y la multiplicación de un elemento por un número se entienden en el sentido ordinario.

513. Hallar los subespacios $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R_4 = R_1 + R_2$ según los datos y condiciones del problema precedente.

514. Se examinan dos subespacios del espacio R de todos los vectores geométricos; R_1 es el conjunto de los vectores paralelos al plano de las coordenadas xOy, y R_2 es el conjunto de los vectores paralelos al plano xOz. Hallar $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R_4 = R_1 + R_2$.

515. Sean R_1 y R_2 subespacios de un espacio lineal R, y R_1' y R_2' subespacios de un espacio lineal R'. Se sabe que los subespacios R_1 y R_1', así como R_2 y R_2' son isomorfos. Demostrar que son isomorfos los subespacios $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R_3' = R_1' \cap R_2'$, así como $R_4 = R_1 + R_2$ y $R_4' = R_1' + R_2'$.

516. Se da un conjunto de funciones $f(x)$ continuas y positivas en el segmento $[-a, a]$. Demostrar que este conjunto es un espacio lineal si se toma como suma de los vectores el producto de las funciones respectivas y como el producto de un vector por un número real λ el resultado de elevación de la función respectiva a la potencia λ. ¿Es el conjunto de todas las funciones impares de este espacio un subespacio?

517. Se examina un espacio lineal de vectores geométricos. ¿Forma un subespacio de este espacio el conjunto de todos los vectores $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, donde X, Y y Z son números racionales?

2. Subespacios formados por las soluciones de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones. Examinemos el sistema lineal homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sean $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, . . ., $x_n = \lambda_n$ una solución cualquiera del sistema. Escribimos esta solución en forma de un vector $\mathbf{f} = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$. El conjunto de las soluciones linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ del sistema de ecuaciones (1) se llama *sistema fundamental de soluciones*, si toda solución del sistema de ecuaciones (1) puede representarse en forma de la combinación lineal de los vectores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$.

TEOREMA SOBRE LA EXISTENCIA DEL SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES. *Si el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es menor que n, el sistema (1) tiene soluciones nulas. El número de vectores que determinan el sistema fundamental de soluciones se halla por la fórmula $k = n - r$, donde r es el rango de la matriz.

De este modo, si se examina un espacio lineal R^n cuyos vectores son todos los posibles sistemas de n números reales, entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema (1) es un subespacio del espacio R^n. La dimensión de este subespacio es igual a k.

518. Hallar la base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0,\\ (1/2)\,x_1+x_2+(3/2)\,x_3+2x_4=0,\\ (1/3)\,x_1+(2/3)\,x_2+x_3+(4/3)\,x_4=0,\\ (1/4)\,x_1+(1/2)\,x_2+(3/4)\,x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2\\ 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3\\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 1, puesto que todos los menores de la matriz, a excepción de los de primer orden, son iguales a cero. El número de incógnitas es igual a 4; por eso la dimensión del subespacio de soluciones $k = n - r = 4 - 1 = 3$, o sea, este espacio es tridimensional. Como $r = 1$, en este sistema basta tomar una ecuación cualquiera.

Tomamos la primera ecuación del sistema y la escribimos de la forma $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$. Si $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, entonces $x_1 = -2$; si $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, entonces $x_1 = -3$, si $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, entonces $x_1 = -4$. De suerte que hemos obtenido los vectores linealmente independientes $\mathbf{f}_1 = (-2;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-3;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{f}_3 = (-4;\ 0;\ 0;\ 1)$ que forman la base del subespacio tridimensional de soluciones de este sistema.

519. Mostrar que el vector $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ satisface el sistema de ecuaciones del problema 461.

520. Hallar la base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1-x_2-x_3=0,\\ -2x_1+4x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es igual a 2, ya que el determinante de tercer orden formado por los elementos de la matriz es igual a cero y entre los menores de segundo orden hay algunos que son distintos de cero. La dimensión del subespacio de soluciones $k = n - r = 3 - 2 = 1$. Como $r = 2$, entonces basta tomar dos ecuaciones entre las tres dadas. Eliminamos la tercera ecuación, puesto que sus coeficientes son proporcionales a los coeficientes correspondientes de la primera ecuación.

En el sistema

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-x_3\\ 2x_1-x_2=x_3 \end{cases}$$

suponemos $x_3 = 1$, entonces la solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

De suerte que el subespacio de las soluciones se determina por el vector básico $\mathbf{f} = (1;\ 1;\ 1)$.

521. Hallar la dimensión y la base del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Solución. Determinamos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Restamos la segunda fila de la tercera y la primera de la cuarta:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como los elementos de la tercera fila son proporcionales a los elementos correspondientes de la primera, y los elementos de la cuarta fila son proporcionales a los de la segunda, se pueden tachar las tercera y cuarta filas:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De suerte que el rango de la matriz A es igual a 2 y $k = n - r = 4 - 2 = 2$.

Pues bien, la dimensión del subespacio de soluciones es igual a 2. Como $r = 2$, tomamos dos de las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Haciendo $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1. \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $\mathbf{f}_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$.

Haciendo ahora $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, tenemos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1. \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Ahora bien, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ y $\mathbf{f}_2 = (0;\ -1;\ 0;\ 1)$.

Como vectores básicos del subespacio pueden tomarse $\mathbf{f}_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (0;\ -1;\ 0;\ 1)$. La solución general del sistema de ecuaciones se determina por el vector $\mathbf{f} = c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2$, o sea, $\mathbf{f} = (0;\ c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$.

522. Determinar la dimensión de los subespacios de soluciones, la base y la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 4. Transformaciones lineales

1. Conceptos principales. Diremos que en un espacio lineal R está representada la *transformación* A si a cada vector $\mathbf{x} \in R$ está puesto en correspondencia, por cierta regla, el vector $A\mathbf{x} \in R$. La transformación A se llama *lineal* si para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y para un número real cualquiera λ se cumplen las igualdades:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \quad A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}.$$

Una transformación lineal se denomina *idéntica* si ella transforma a un vector cualquiera $\mathbf{x}$ en sí mismo. Una transformación lineal idéntica se designa por E. De este modo, $\mathrm{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

523. Mostrar que la transformación $\mathrm{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$, donde α es un número real, es lineal.

Resolución. Tenemos

$$\mathrm{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y},$$
$$\mathrm{A}(\lambda\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda\mathrm{A}\mathbf{x}.$$

De este modo, ambas condiciones que determina la transformación lineal se cumplen. La transformación examinada A se llama *transformación de semejanza*.

524. Una transformación A se define en un espacio lineal R por la igualdad $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0 \in R$ es un vector fijo no nulo. ¿Es lineal la transformación A?

Resolución. De las igualdades $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, $\mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}_0$, $\mathrm{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0$, $\mathrm{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{A}\mathbf{y}$ sacamos la conclusión de que $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) + (\mathbf{y} + \mathbf{x}_0)$. De aquí se deduce que $\mathbf{x}_0 = 0$, pero esto contradice las condiciones del problema. Por consiguiente, la transformación A no es lineal.

525. Se da un espacio lineal de los vectores geométricos. La transformación A consiste en sustituir cada vector por sus componentes referentes al eje Ox. ¿Es lineal esta transformación?

Resolución. Sean $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$, vectores arbitrarios y λ un número real arbitrario. Como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1 + X_2)\,\mathbf{i} + (Y_1 + Y_2)\,\mathbf{j} + (Z_1 + Z_2)\,\mathbf{k},$$
$$\lambda\mathbf{a} = \lambda X_1\mathbf{i} + \lambda Y_1\mathbf{j} + \lambda Z_1\mathbf{k},$$

entonces

$$\mathrm{A}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (X_1 + X_2)\,\mathbf{i} = X_1\mathbf{i} + X_2\mathbf{i} = \mathrm{A}\mathbf{a} + \mathrm{A}\mathbf{b},$$
$$\mathrm{A}(\lambda\mathbf{a}) = \mathrm{A}X_1\mathbf{i} = \lambda\mathrm{A}\mathbf{a}.$$

Por lo tanto, A es una transformación lineal.

526. ¿Es la sustitución de cada vector geométrico por su aplicación especular respecto al plano de coordenadas xOy una transformación lineal?

527. ¿Es la multiplicación de cada vector geométrico por su longitud una transformación lineal?

528. ¿En qué caso la transformación A es lineal si $A\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}$ es un vector arbitrario de un espacio lineal R y $\mathbf{x}_0$ es un vector fijo?

529. Se da el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$, donde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, son todos los números reales posibles. Sea a un número real fijo. ¿Es lineal la transformación A definida por la igualdad $A\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$?

530. Se da el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$. La transformación A consiste en que en cada vector cambian de lugar la segunda y tercera coordenadas, o sea, $A\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_3\mathbf{e}_2 + \xi_2\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$. ¿Es lineal la transformación A?

531. Sea A una transformación lineal. Demostrar que la transformación B definida por la igualdad $B\mathbf{x} = A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}$ es lineal.

2. Matriz de una transformación lineal. Supongamos que en un espacio lineal n-dimensional R cuya base es $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, se representa una transformación lineal A. Como $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n$ son los vectores del espacio R, cada uno de ellos se puede descomponer de modo único por los vectores de la base:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\mathbf{e}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de la transformación lineal* A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Las columnas de esta matriz se componen de los coeficientes representados en las fórmulas de transformación de los vectores básicos. Tomamos en el espacio R un vector cualquiera $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Como $A\mathbf{x} \in R$, entonces el vector $A\mathbf{x}$ se puede descomponer en vectores de la base:

$$A\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n'\mathbf{e}_n.$$

Las coordenadas $(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ del vector $A\mathbf{x}$ se expresan por las coordenadas $(x_1\ x_2; \ldots; x_n)$ del vector $\mathbf{x}$ usando las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Estas n igualdades pueden llamarse transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Los coeficientes representados en las fórmulas de esta transformación lineal son elementos de las líneas de la matriz A.

532. Hallar la matriz de una transformación idéntica E en un espacio n-dimensional:

Resolución. Una transformación idéntica no cambia sus vectores básicos: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$; $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$, ..., $\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n$, o sea,

$$\begin{gathered}\mathbf{e}'_1 = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\ \mathbf{e}'_2 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{e}'_n = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 1\cdot\mathbf{e}_n.\end{gathered}$$

Por consiguiente, de matriz de la transformacion lineal sirve la matriz unidad

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

533. Hallar la matriz de la transformación de semejanza $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ en un espacio n-dimensional.

534. En un espacio lineal cuadridimensional se examina una transformación lineal A. Escribir esta transformación en la forma de coordenadas si $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Resolución. La matriz de la transformación A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación A se ecribe en forma de coordenadas así: $x'_1 = x_2 + x_3$, $x'_2 = x_3 + x_4$, $x'_3 = x_1 + x_4$, $x'_4 = x_1 + x_2$.

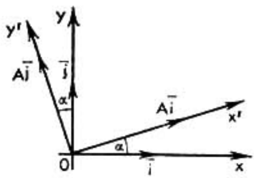


Fig. 22

535. La transformación lineal del conjunto de todos los vectores sobre el plano xOy consiste en girar cada vector en el sentido contrario al de las agujas del reloj en un ángulo α (fig. 22). Hallar la matriz de esta transformación lineal en la forma de coordenadas.

Resolución. Como

$$A\mathbf{i} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\operatorname{sen}\alpha, \qquad A\mathbf{j} = -\mathbf{i}\operatorname{sen}\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha,$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

De este modo, la transformación lineal considerada tiene la forma

$$x' = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha; \qquad y' = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha.$$

536. Se examina el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$, donde x_1, x_2, x_3, x_4, son números reales cualesquiera. Demostrar que la transformación A definida por la igualdad $Ax = x_2e_1 + x_3e_2 + x_4e_3 + x_1e_4$, es lineal, y hallar su matriz.

3. Operaciones sobre las transformaciones lineales. En las definiciones que se dan a continuación se designan: por A y B transformaciones lineales arbitrarias en un espacio lineal R, por λ un número real arbitrario, por $x \in R$ un elemento cualquiera.

Se llama *suma de las transformaciones lineales* A y B a la transformación C_1 definida por la igualdad $C_1x = Ax + Bx$. Designación: $C_1 = A + B$.

Se denomina *producto de la transformación lineal* A *por un número* λ a la transformación C_2 definida por la igualdad $C_2x = \lambda Ax$. Designación: $C_2 = \lambda A$.

Ha recibido el nombre de *producto de la transformación* lineal A por la transformación lineal B a la transformación *lineal* C_3 definida por la igualdad $C_3x = ABx$. Designación: $C_3 = AB$.

Las transformaciones C_1, C_2 y C_3 son lineales. Las matrices de las transformaciones lineales C_1, C_2 y C_3 se determinan de las igualdades $C_1 = A + B$, $C_2 = \lambda A$, $C_3 = AB$.

Al sumar las transformaciones lineales se cumple la ley conmutativa; no obstante, hablando en general, el producto AB se distingue del producto BA.

Citemos algunas propiedades de las operaciones sobre las transformaciones lineales en el espacio R:

$$A(BC) = (AB)C; \quad AE = EA = A; \quad (A + B)C = AC + BC;$$
$$C(A + B) = CA + CB.$$

Si para una transformación lineal A se encuentran tales transformaciones lineales B y C que $BA = E$, $AC = E$, entonces $B = C$. En este caso se designan $B = C = A^{-1}$, y la transformación lineal A^{-1} se llama *transformación lineal inversa* respecto a la transformación lineal A. De este modo, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Una transformación lineal A en un espacio de dimensión finita se llama *regular* si el determinante de la matriz de esta transformación es distinto de cero. Hay que tener en cuenta que cada transformación lineal regular A tiene una transformación inversa A^{-1}, y ésta es única.

Si una transformación lineal regular A se define en la forma de coordenadas por las igualdades

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1n}u, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + \ldots + a_{2n}u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u' &= a_{n1}x + a_{n2}y + \ldots + a_{nn}u, \end{aligned}$$

la transformación lineal inversa A^{-1} tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_{11}}{|A|}x' + \frac{A_{21}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}u', \\ y &= \frac{A_{12}}{|A|}x' + \frac{A_{22}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}u', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u &= \frac{A_{1n}}{|A|}x' + \frac{A_{2n}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}u'. \end{aligned}$$

Aquí A_{ij} es el complemento algebráico del elemento a_{ij} de la matriz A y $|A|$ es el determinante de la matriz A.

La matriz de la transformación lineal A^{-1} es inversa respecto a la matriz A y se define por la igualdad

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

537. La transformación A consiste en que cada vector del plano xOy está vuelto en el ángulo $\alpha=\pi/4$. Hallar en la forma de coordenadas la transformación $\mathrm{A}+\mathrm{E}$.

Resolución. Tenemos

$$A\mathbf{i}=\mathbf{i}\cos(\pi/4)+\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,(\pi/4)=(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i}+(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j};$$
$$A\mathbf{j}=\mathbf{i}\cos(3\pi/4)+\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,(3\pi/4)=-(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i}+(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente,

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Como $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A+E=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2+1 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2+1 \end{pmatrix}.$$

Pues bien, la transformación lineal $\mathrm{A}+\mathrm{E}$ se puede escribir con ayuda de las igualdades

$$x'=(\sqrt{2}/2+1)\,x-(\sqrt{2}/2)\,y,$$
$$y'=(\sqrt{2}/2)\,x+(\sqrt{2}/2+1)\,y.$$

538. Se dan dos transformaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+2y+3z, \\ y' &= 4x+5y+6z, \\ z' &= 7x+8y+9z \end{aligned}\right. \quad (\mathrm{A}) \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x+3y+4{,}5z, \\ y' &= 6x+7y+9z, \\ z' &= 10{,}5x+12y+13z. \end{aligned}\right. \quad (\mathrm{B})$$

Hallar $3\mathrm{A}-2\mathrm{B}$.

539. Se dan dos transformaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+y, \\ y' &= y+z, \\ z' &= z+x \end{aligned}\right. \quad (\mathrm{A}) \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} x' &= y+z, \\ y' &= x+z, \\ z' &= x+y. \end{aligned}\right. \quad (\mathrm{B})$$

Hallar las transformaciones AB y BA.

Resolución. Las matrices de las transformaciones dadas tienen la forma

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos los productos de estas matrices:

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

En este caso $AB = BA$, por eso las transformaciones lineales AB y BA coinciden. La forma de coordenadas de la transformación AB se escribe del modo siguiente:

$$x' = x + y + 2z,\quad y' = 2x + y + z,\quad z' = x + 2y + z.$$

540. Supongamos que el conjunto de los vectores $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sobre el plano xOy se somete a dos transformaciones lineales: A, o sea, la sustitución del vector por su componente en el eje Ox; B, o sea, la aplicación especular del vector respecto a la bisectriz de los ángulos de coordenadas I y III. Hallar las transformaciones AB y BA.

Resolución. Según los datos del problema $A\mathbf{u} = x\mathbf{i}$, $B\mathbf{u} = x\mathbf{j} + y\mathbf{i}$. Así, pues, $A\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $A\mathbf{j} = 0$, $B\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $B\mathbf{j} = \mathbf{i}$, o sea,

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

De suerte que la transformación AB se define por las igualdades $x' = y$, $y' = 0$ y la transformación BA por las igualdades $x' = 0$, $y' = x$. Recomendamos obtener estas igualdades partiendo de las consideraciones geométricas.

541. La transformación A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo α. Hallar la matriz de la transformación A^2 (o sea, $A\cdot A$).

Resolución. Puesto que $A\mathbf{i} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $A\mathbf{j} = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha$, entonces

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha & -2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\\ 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\mathrm{sen}\,2\alpha\\ \mathrm{sen}\,2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la transformación A^2 en la forma de coordenadas se determina por las igualdades

$$x' = x\cos 2\alpha - y\,\mathrm{sen}\,2\alpha,\qquad y' = x\,\mathrm{sen}\,2\alpha + y\cos 2\alpha.$$

Estos resultados también pueden ser obtenidos partiendo de consideraciones puramente geométricas.

542. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo $\pi/4$. Hallar la matriz de la transformación lineal $B = A^2 + \sqrt{2}A + E$.

Resolución. Tenemos

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\sqrt{2}/2\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

543. Se da el espacio de los vectores geométricos. Supongamos que la transformación lineal A es un giro del espacio alrededor del eje Oz en el ángulo $\pi/4$ y la transformación lineal B es un giro del espacio alrededor del eje Ox en el mismo ángulo. Hallar la matriz de la transformación lineal AB.

Resolución. Tenemos

$$A\mathbf{i}=\mathbf{i}\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j},\quad A\mathbf{j}=-\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}+\mathbf{j}\cos\frac{\pi}{4}=-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j},\quad A\mathbf{k}=\mathbf{k};\quad B\mathbf{i}=\mathbf{i},\quad B\mathbf{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{k},\quad B\mathbf{k}=-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2\\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}.$$

544. Se da la transformación lineal A:

$$x'=-0{,}5\,(y+z),\quad y'=-0{,}5\,(x+z),\quad z'=-0{,}5\,(x+y).$$

Hallar la matriz de la transformación lineal inversa.

545. Se examina un conjunto de todos los vectores geométricos. La transformación lineal A es la aplicación especular de estos vectores respecto al plano P. Hallar A^{-1}.

546. En un espacio lineal con base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ se da la transformación lineal A. Hallar la matriz de la transformación inversa si $A\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1$.

547. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo α. Hallar la matriz $B=A+A^{-1}$.

548. Se da la transformación lineal A: $x'=x+y$, $y'=2\,(x+y)$. Hallar la transformación lineal inversa.

549. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en el ángulo $\pi/4$. Hallar la matriz A^{-2}.

550. ¿Para qué valor de λ la transformación lineal $x'=-2x+y+z$, $y'=x-2y+z$, $z'=x+y+\lambda z$ no tiene transformación inversa?

4. Números característicos y vectores propios de una transformación lineal. Sea R un espacio lineal n-dimensional dado. El vector no nulo $\mathbf{x}\in R$ se llama *vector propio* de una transformación lineal A si existe un número λ tal, que se cumpla la igualdad $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Este número λ se denomina *número característico* de la transformación lineal A, correspondiente al vector $\mathbf{x}$.

Si la transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tiene la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces de números característicos de la transformación lineal A sirven las raíces reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación de grado n que se puede escribir de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Ella se llama *ecuación característica* y su primer miembro se denomina *polinomio característico* de la transformación lineal A. De vector propio $\mathbf{x}_k$ que corresponde al número característico λ_k sirve un vector cualquiera $\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots$ $\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n$, cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_k)\,\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda_k)\,\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda_k)\,\xi_n=0. \end{cases}$$

Conviene indicar los teoremas importantes siguientes.

El polinomio característico de una transformación lineal no depende de la elección de la base.

Si la matriz A de una transformación lineal A es simétrica, entonces todas las raíces de la ecuación característica $|A-\lambda E|=0$ son números reales.

551. Hallar los números característicos y los vectores propios de la transformación A definida por las ecuaciones $x'=5x+4y$, $y'=8x+9y$.

Resolución. La matriz de la transformación se escribirá así:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ o bien } \lambda^2-14\lambda+13=0;$$

los números característicos son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=13$.

Para determinar las coordenadas de los vectores propios obtenemos dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\,\xi_1+4\xi_2=0 \\ 8\xi_1+(9-\lambda_1)\,\xi_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (5-\lambda_2)\,\xi_1+4\xi_2=0, \\ 8\xi_1+(9-\lambda_2)\,\xi_2=0. \end{cases}$$

Como $\lambda_1=1$, el primer sistema puede ser escrito del modo siguiente:

$$\begin{cases} 4\xi_1+4\xi_2=0, \\ 8\xi_1+8\xi_2=0. \end{cases}$$

Pues bien, los valores de ξ_1 y ξ_2 deben satisfacer la ecuación $\xi_1+\xi_2=0$ o bien $\xi_2=-\xi_1$. Por lo tanto, la solución de este sistema tiene la forma $\xi_1=c_1$,

$\xi_2 = -c_1$, donde c_1 es una magnitud arbitraria. Así, pues, al número característico $\lambda = 1$ le corresponde una familia de vectores propios $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 - c_1\mathbf{e}_2$, o sea, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

El valor de $\lambda_2 = 13$ lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

o sea, $\xi_2 = 2\xi_1$. Suponiendo $\xi_1 = c_2$, obtenemos $\xi_2 = 2c_2$. Por consiguiente, al número característico $\lambda = 13$ le corresponde una familia de los vectores propios $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$.

De suerte que aplicando a las magnitudes c_1 y c_2 presentes en las igualdades $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ y $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$ valores numéricos cualesquiera, obtendremos vectores propios respectivos de la transformación lineal A.

552. Se da una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Hallar los números característicos y los vectores propios de esta transformación.

553. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

554. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

555. Determinar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Planteemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea, } (1-\lambda)\,[(2-\lambda)^2 - 1] = 0,\ (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 3.$$

Si $\lambda = 1$, entonces, para determinar las coordenadas del vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, al número característico $\lambda = 1$ le corresponde una familia de los vectores propios $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Si $\lambda = 3$, entonces, para determinar las coordenadas del vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

La familia de los vectores propios correspondientes a este número característico se define por la igualdad $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

556. Determinar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal A con la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

557. Demostrar que si

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y los números reales α, β y γ son distintos de cero, todas las raíces de la ecuación característica de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\alpha/\beta & a_{13}\alpha/\gamma\\ a_{21}\beta/\alpha & a_{22} & a_{23}\beta/\gamma\\ a_{31}\gamma/\alpha & a_{32}\gamma/\beta & a_{33}\end{pmatrix}$$

son números reales.

Resolución. En la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ examinemos la transformación lineal A con la matriz A. Entonces

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + (a_{21}\beta/\alpha)\,\mathbf{e}_2 + (a_{31}\gamma/\alpha)\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e}_2 = (a_{12}\alpha/\beta)\,\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + (a_{32}\gamma/\beta)\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e}_3 = (a_{13}\alpha/\gamma)\,\mathbf{e}_1 + (a_{23}\beta/\gamma)\,\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3,$$

o bien

$$\mathrm{A}(\alpha\mathbf{e}_1) = a_{11}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{21}\beta\mathbf{e}_2 + a_{31}\gamma\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}(\beta\mathbf{e}_2) = a_{12}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{22}\beta\mathbf{e}_2 + a_{32}\gamma\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}(\gamma\mathbf{e}_3) = a_{13}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{23}\beta\mathbf{e}_2 + a_{33}\gamma\mathbf{e}_3.$$

Haciendo $\alpha\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1'$, $\beta\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2'$, $\gamma\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3'$, tenemos

$$A\mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1' + a_{21}\mathbf{e}_2' + a_{31}\mathbf{e}_3',$$
$$A\mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1' + a_{22}\mathbf{e}_2' + a_{32}\mathbf{e}_3',$$
$$A\mathbf{e}_3' = a_{13}\mathbf{e}_1' + a_{23}\mathbf{e}_2' + a_{33}\mathbf{e}_3'.$$

De este modo, de matriz de la transformación lineal A en base $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ sirve la matriz simétrica

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación característica de la transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tiene sólo raíces reales. Puesto que al pasar a la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ los números característicos no cambian, entonces las mismas raíces las tiene también la ecuación característica de la matriz A.

558. La transformación lineal A consiste en girar un espacio en un ángulo igual a $\pi/3$ alrededor del eje Oz. Hallar los números característicos y los vectores propios de esta transformación.

Indicación: mostrar que la matriz de esta transformación lineal tiene la forma

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

559. Conociendo los números característicos de la transformación lineal A hallar los números característicos de la transformación lineal inversa A^{-1}.

Indicación: mostrar que de la ecuación $|A^{-1}-\lambda E|=0$ resulta la ecuación $|A-(1/\lambda)E|=0$.

560. Hallar los números característicos y los vectores propios de la transformación lineal A con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

561. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

§ 5. Espacio euclídeo

Un espacio lineal R se llama *euclídeo* si hay una regla que permita para cada dos vectores **x** e **y** de R construir un número real denominado *producto escalar* de los vectores **x** e **y** y designado por (**x**, **y**), con ello esta regla satisface las condiciones siguientes:

1ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
2ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$;
3ª. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para un número real cualquiera λ;
4ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, si $\mathbf{x} \neq 0$.

De las condiciones 1ª a 4ª se deduce que:

a) $(\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{x})$;
b) $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
c) $(0, \mathbf{x}) = 0$ para cualquier vector **x**.

El producto escalar de cualquier vector $\mathbf{x} \in R$ por sí mismo, se llama *cuadrado escalar* del vector **x**.

Se denomina *longitud* del vector **x** en un espacio euclídeo a la raíz cuadrada extraída del cuadrado escalar de este vector, o sea, $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Si λ es un número real cualquiera y **x** es un vector cualquiera de un espacio euclídeo, entonces $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\cdot|\mathbf{x}|$.

Un vector cuya longitud es igual a la unidad se dice *normalizado*. Si $\mathbf{x} \in R$ es un vector no nulo, no es difícil ver que $\frac{1}{|\mathbf{x}|}\cdot\mathbf{x}$ $\left(\text{se puede designar por } \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$ es un vector normalizado.

Para dos vectores cualesquiera **x** e **y** en un espacio euclídeo se cumple la desigualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ llamada *desigualdad de Cauchy — Buniakovski.*

La igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ tiene lugar si, y sólo si, los vectores **x** e **y** son linealmente dependientes.

De la desigualdad de Cauchy — Buniakovski resulta que $-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leqslant$ $\leqslant 1$. El ángulo φ definido por la igualdad $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$ y perteneciente al segmento $[0, \pi]$ se denomina *ángulo entre los vectores* **x** e **y**. Si **x** e **y** son vectores no nulos y $\varphi = \pi/2$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. En este caso se dice que los vectores **x** e **y** son *ortogonales y* se escribe $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Para vectores arbitrarios **x** e **y** de un espacio euclídeo tienen lugar las relaciones siguientes fundamentales:

1. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (*desigualdad del triángulo*).

2. Sea φ el ángulo entre los vectores **x** e **y**; entonces $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 +$ $+ |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cos\varphi$ (*teorema del coseno*). Si $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, entonces se obtiene la igualdad $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$. Sustituyendo en la última igualdad **y** por $-\mathbf{y}$ obtendremos $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ (*teorema de Pitágoras*).

562. Se da el espacio lineal examinado en el problema 461. ¿Se puede definir el producto escalar de dos vectores arbitrarios $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$ por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$ (para que este espacio llegue a ser euclídeo)?

Resolución. Vamos a comprobar el cumplimiento de las condiciones 1ª — 4ª.

1ª. Como $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \ldots + \eta_n\xi_n$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2ª. Sea $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$. Entonces $\mathbf{y} + \mathbf{z} = (\eta_1 + \zeta_1; \eta_2 + \zeta_2; \ldots$ $\ldots; \eta_n + \zeta_n)$ y

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = \xi_1\eta_1 + \xi_1\zeta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_2\zeta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n + \xi_n\zeta_n =$$
$$= (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n) + (\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \ldots + \xi_n\zeta_n) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) +$$
$$+ (\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

3ª. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2 + \ldots + \lambda\xi_n\eta_n = \lambda(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots$ $\ldots + \xi_n\eta_n) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

4ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 \neq 0$ si al menos uno de los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ es distinto de cero.

563. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ la cantidad de n tipos de artículos que se fabrican diariamente por una planta y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ los precios respectivos de estos artículos. ¿Cómo se puede interpretar el producto escalar de los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots$ $\ldots; \eta_n)$?

564. Se da un espacio lineal cuyos vectores son todos los sistemas posibles compuestos por n números positivos: $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots$ $\ldots; \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, ... La adición de los vectores y la multiplicación de un vector por un número están definidas por las igualdades $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n\eta_n)$, $\lambda\mathbf{x} = (\xi_1^\lambda, \xi_2^\lambda, \ldots, \xi_n^\lambda)$. ¿Se puede hacer euclídeo este espacio al definir el producto escalar por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ $= \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \ldots + \ln\xi_n \ln\eta_n$?

Resolución. Vamos a comprobar el cumplimiento de las condiciones 1ª — 4ª.

1ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \ldots + \ln\xi_n \ln\eta_n$,

$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \ln\eta_1 \ln\xi_1 + \ln\eta_2 \ln\xi_2 + \ldots + \ln\eta_n \ln\xi_n$,

o sea, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2ª. Puesto que $\mathbf{y}+\mathbf{z}=(\eta_1\zeta_1;\ \eta_2\zeta_2;\ \ldots;\ \eta_n\zeta_n)$, entonces

$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}+\mathbf{z})=\ln\xi_1\ln(\eta_1\zeta_1)+\ln\xi_2\ln(\eta_2\zeta_2)+\ldots+\ln\xi_n\ln(\eta_n\zeta_n)=$ $=\ln\xi_1\ln\eta_1+\ln\xi_2\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n\ln\eta_n+\ln\xi_1\ln\zeta_1+\ln\xi_2\ln\zeta_2+$ $+\ldots+\ln\xi_n\ln\zeta_n=(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+(\mathbf{x},\ \mathbf{z})$.

3ª. Como $\lambda\mathbf{x}=(\xi_1^\lambda;\ \xi_2^\lambda;\ \ldots;\ \xi_n^\lambda)$, entonces

$(\lambda\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\ln\xi_1^\lambda\ln\eta_1+\ln\xi_2^\lambda\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n^\lambda\ln\eta_n=\lambda(\ln\xi_1\times$ $\times\ln\eta_1+\ln\xi_2\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n\ln\eta_n)=\lambda(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.

4ª. $(\mathbf{x},\ \mathbf{x})=\ln^2\xi_1+\ln^2\xi_2+\ldots+\ln^2\xi_n\geqslant 0$.

Por lo tanto, el espacio que se considera es euclídeo.

565. Se examina un espacio lineal de las funciones $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)$, ... que son continuas en el intervalo $[a,\ b]$. ¿Puede hacerse lineal este espacio al definir el producto escalar de dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por la igualdad $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=$ $=\int\limits_a^b \mathbf{x}(t)\,\mathbf{y}(t)\,dt$?

566. ¿Es el conjunto de todos los vectores geométricos un espacio euclídeo si el producto escalar de dos vectores se define como producto de sus longitudes?

567. ¿Forma el conjunto de todos los vectores geométricos un espacio euclídeo si el producto escalar de dos vectores arbitrarios **a** y **b** se define como producto de la longitud del vector **a** y la producción triplicada del vector **b** por el sentido del vector **a**?

568. Se da el espacio lineal examinado en el problema 562 para $n=4$. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=(4;\ 1;\ 2;\ 2)$ e $\mathbf{y}=(1;\ 3;\ 3;\ -9)$.

Resolución. Tenemos

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})}=\sqrt{16+1+4+4}=5;$$

$$|\mathbf{y}|=\sqrt{\mathbf{y},\ \mathbf{y}}=\sqrt{1+9+9+81}=10;\ (\mathbf{x},\ \mathbf{y})=4+3+6-18=-5;$$

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}=\frac{-5}{5\cdot 10}=-0{,}1;\quad \varphi=\arccos(-0,\ 1)=174°15'.$$

569. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=(1;\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \ldots$ $\ldots;\ \sqrt{2n-1})$ e $\mathbf{y}=(1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$.

570. Se examina el espacio euclídeo de las funciones continuas $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, ... en el segmento $[-1,\ 1]$. El producto escalar está definido por la igualdad $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{x}(t)\,\mathbf{y}(t)\,dt$. Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=3t^2-1$, $\mathbf{y}=3t-5t^3$.

Resolución. Tenemos

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\int\limits_{-1}^{1}(3t^2-1)(3t-5t^3)\,dt.$$

No es difícil ver que $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$, ya que la función subintegral es impar. Por consiguiente, los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales.

571. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562 para $n = 6$. Comprobar la validez del teorema de Pitágoras para los vectores ortogonales $\mathbf{x} = (1;\ 0;\ 2;\ 0;\ 2;\ 0)$ e $\mathbf{y} = (0;\ 6;\ 0;\ 3;\ 0;\ 2)$.

Resolución. Tenemos

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{1+0+4+0+4+0} = 3, \qquad |\mathbf{y}| = \sqrt{0+36+0+9+0+4} = 7;$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (1;\ 6;\ 2;\ 3;\ 2;\ 2);$$

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| = \sqrt{1+36+4+9+4+4} = \sqrt{58}.$$

De suerte que $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2$.

572. En el espacio euclídeo de las funciones continuas correspondientes a los datos del problema 565 se examinan dos vectores: $\mathbf{x} = t^2 + 1$, $\mathbf{y} = \lambda t^2 + 1$. Hallar el valor de λ para el cual los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales sobre el segmento $[0, 1]$ y comprobar la justeza del teorema de Pitágoras para estos vectores.

Resolución. Escribimos el producto escalar

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 (t^2+1)(\lambda t^2+1)\, dt = \lambda/5 + (\lambda+1)/3 + 1$$

Puesto que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, determinamos λ; tenemos $\lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1 = 0$, de donde $\lambda = -5/2$.

Hallamos ahora las longitudes de los vectores $\mathbf{x} = t^2 + 1$, $\mathbf{y} = -(5/2)\, t^2 + 1$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = -(3/2)\, t^2 + 2$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\int_0^1 (t^4+2t^2+1)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1} = \sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{25}{4}t^4-5t^2+1\right) dt} = \sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{3}+1} = \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^4-6t^2+4\right) dt} = \sqrt{\frac{9}{20}-2+4} = \sqrt{\frac{49}{20}}.$$

De este modo, $|\mathbf{x}|^2 = 28/15$, $|\mathbf{y}|^2 = 7/12$, $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = 49/20$, o sea, $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2$.

573. Se examina un conjunto de sistemas ordenados cualesquiera de los vectores geométricos $\mathbf{a}^* = (\mathbf{a}_1;\ \mathbf{a}_2;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n)$, $\mathbf{b}^* = (\mathbf{b}_1;\ \mathbf{b}_2;\ \ldots;\ \mathbf{b}_n)$, $\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}_1;\ \mathbf{c}_2;\ \ldots;\ \mathbf{c}_n)$, ... ¿Es euclídeo este conjunto si la adición de los elementos, la multiplicación de un elemento por un número y el producto escalar se definen por las igualdades $\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1;\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$, $\lambda\mathbf{a}^* = (\lambda\mathbf{a}_1;\ \lambda\mathbf{a}_2;\ \ldots;\ \lambda\mathbf{a}_n)$, $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$? (el segundo miembro de la última igualdad es la suma de los productos escalares de los vectores geométricos).

574. Demostrar la justeza de las desigualdades:

$$\sqrt{(\xi_1+\eta_1)^2+(\xi_2+\eta_2)^2+\ldots+(\xi_n+\eta_n)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots\ \xi_n^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2};$$
$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2)\leqslant$$
$$\leqslant(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n)^2,$$

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ son números reales.

Indicación. Utilizar las desigualdades triangular y de Cauchy — Buniakovski para el espacio euclídeo examinado en el problema 562.

575. Se examinan todas las funciones continuas posibles $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ... sobre el segmento $[0, 1]$. Demostrar la justeza de las desigualdades:

$$\sqrt{\int_0^1(x+y)\,dt}\leqslant\sqrt{\int_0^1 x^2\,dt}+\sqrt{\int_0^1 y^2\,dt},$$

$$\int_0^1(y^2/x^2)\,dt\geqslant\Big(\int_0^1 y\,dt\Big)^2\Big/\Big(\int_0^1 x^2\,dt\Big),\quad \text{si}\quad x(0)\neq 0.$$

§ 6. Base ortogonal y transformaciones ortogonales

1. Base ortogonal. La base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de un espacio euclídeo se llama *ortogonal* si $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=0$ cuando $i\neq k$.

Es justo el *teorema* siguiente: *en todo espacio euclídeo hay una base ortogonal.* Si la base ortogonal se compone de vectores normalizados, entonces esta base se llama *ortonormal*. Para la base ortogonal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ se cumplen las igualdades

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad i\neq k;\\ 1, & \text{si}\quad i=k.\end{cases}$$

Si en un espacio euclídeo n-dimensional se conoce una base cualquiera $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, en este espacio siempre se puede encontrar también la base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Cualquier vector $\mathbf{x}$ de un espacio euclídeo, representado en la base ortonormal, se define por la igualdad

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n.$$

La longitud del vector $\mathbf{x}$ se encuentra por la fórmula

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}.$$

Dos vectores $\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=\eta_1\mathbf{e}_1+\eta_2\mathbf{e}_2+\ldots+\eta_n\mathbf{e}_n$ son linealmente independientes (colineales, proporcionales) si, y sólo si,

$$\xi_1/\eta_1=\xi_2/\eta_2=\ldots=\xi_n/\eta_n.$$

La condición de ortogonalidad de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tiene la forma

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n=0.$$

El ángulo entre dos vectores **x** e **y** se encuentra por la fórmula

$$\cos\varphi=\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\cdot\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}}.$$

En los problemas siguientes la base ortonormal de un espacio euclídeo n-dimensional se designa por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

576. Hallar la longitud del vector $\mathbf{x}=4\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4$.

577. Normalizar el vector $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1+2\sqrt{2\mathbf{e}_2}+3\sqrt{3\mathbf{e}_3}+8\mathbf{e}_4+5\sqrt{5\mathbf{e}_5}$.

578. Se da la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2/7 & 3/7 & 6/7\\ 6/7 & -2/7 & 3/7\\ 3/7 & 6/7 & -2/7\end{pmatrix}$$

de paso de la base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. Demostrar que la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ es ortonormal.

579. Normalizar el vector $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1\,\text{sen}^3\,\alpha+\mathbf{e}_2\,\text{sen}^2\,\alpha\cos\alpha+\mathbf{e}_3\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+\mathbf{e}_4\cos\alpha$.

580. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1\sqrt{7}+\mathbf{e}_2\sqrt{5}+\mathbf{e}_3\sqrt{3}+\mathbf{e}_4$, $\mathbf{y}=\mathbf{e}_1\sqrt{7}+\mathbf{e}_2\sqrt{5}$.

581. Hallar un vector normalizado que sea ortogonal a los vectores $\mathbf{x}=3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4$, $\mathbf{y}=\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $\mathbf{z}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$.

582. ¿Para qué valor de λ los vectores $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{e}_1+\lambda\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3-\lambda\mathbf{e}_4$, $\mathbf{y}=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\lambda\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4$ tienen iguales longitudes?

583. En un espacio cuatridimensional se da la base $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$. Mediante los vectores de esta base construir la base ortonormal de este mismo espacio.

Resolución. Primeramente construimos en el espacio dado una base cualquiera $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$.

Hacemos $\mathbf{g}_1=\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_2=\mathbf{f}_2+\alpha\mathbf{g}_1$. Escogemos un número real α de modo que se cumpla la condición de $\mathbf{g}_2\perp\mathbf{g}_1$. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{g}_1$ ambos miembros de la última igualdad, obtenemos

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)=(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2)+\alpha(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1).$$

Como $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)=0$, entonces $\alpha=-(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$.

Luego, en la igualdad $\mathbf{g}_3=\mathbf{f}_3+\beta_1\mathbf{g}_1+\beta_2\mathbf{g}_2$ seleccionemos β_1 y β_2 de modo que se cumplan las condiciones $\mathbf{g}_3\perp\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_3\perp\mathbf{g}_2$. De las igualdades

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)=(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_3)+\beta_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)+\beta_2(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$
$$(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)=(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_3)+\beta_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)+\beta_2(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$$

obtenemos $\beta_1=-(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_3)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, $\beta_2=-(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_3)/(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$.

Por último, de la igualdad $\mathbf{g}_4=\mathbf{f}_4+\gamma_1\mathbf{g}_1+\gamma_2\mathbf{g}_2+\gamma_3\mathbf{g}_3$ hallamos $\gamma_1=-(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, $\gamma_2=-(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$, $\gamma_3=-(\mathbf{g}_3, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3)$.

De suerte que con la selección efectuada $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ los vectores $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ son ortogonales de par en par. Por lo tanto, los vectores $\mathbf{e}_1=\mathbf{g}_1/|\mathbf{g}_1|$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{g}_2/|\mathbf{g}_2|$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{g}_3/|\mathbf{g}_3|$, $\mathbf{e}_4=\mathbf{g}_4/|\mathbf{g}_4|$ forman una base ortonormal.

584. Se examina un espacio euclídeo de polinomios no superiores al segundo grado. El producto escalar de dos polinomios arbitrarios $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ está definido por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \mathbf{x}(t)\, \mathbf{y}(t)\, dt$. Utilizando la base $\mathbf{f}_1 = t^2$, $\mathbf{f}_2 = t$, $\mathbf{f}_3 = 1$ y valiéndose del método de resolución examinado en el problema 583, construir la base ortonormal para este espacio.

Resolución. Primeramente construimos la base ortogonal: $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Haciendo $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$, o sea, $\mathbf{g}_1 = t^2$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha \mathbf{g}_1 = t + \alpha t^2$. Entonces

$$\int_0^1 \mathbf{g}_2 t^2\, dt = \int_0^1 t^3\, dt + \alpha \int_0^1 t^4\, dt.$$

En virtud de la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$ el primer miembro de la última igualdad se anula. Así, pues, $\alpha = -5/4$ y $\mathbf{g}_2 = t - 5t^2/4$.

Hallamos ahora $\mathbf{g}_3$. En la igualdad $\mathbf{g}_3 = 1 + \beta_1 t + \beta_2 (t - 5t^2/4)$ determinamos los valores de β_1 y β_2 a partir de las condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^1 \mathbf{g}_3 t^2\, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \mathbf{g}_3 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt = 0.$$

De este modo,

$$0 = \int_0^1 t^2\, dt + \beta_1 \int_0^1 t^4\, dt \quad \text{y} \quad 0 = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt + \beta_2 \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt.$$

De aquí $\beta_1 = -5/3$, $\beta_2 = -4$ y $\mathbf{g}_3 = 1 - 5t^2/3 - 4(t - 5t^2/4)$, o sea, $\mathbf{g}_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$.

Hallamos las longitudes de los vectores $\mathbf{g}_1 = t^2$, $\mathbf{g}_2 = t - 5t^2/4$ y $\mathbf{g}_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$:

$$|\mathbf{g}_1| = \sqrt{\int_0^1 t^4\, dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad |\mathbf{g}_2| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad |\mathbf{g}_3| = \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3} t^2\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 8t + \frac{68}{3} t^2 - \frac{80}{3} t^3 + \frac{100}{9} t^4\right) dt} =$$

$$= \sqrt{1 - 4 + \frac{68}{9} - \frac{20}{3} + \frac{20}{9}} = \frac{1}{3}.$$

De este modo, los vectores

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1/|\mathbf{g}_1| = \sqrt{5}\, t^2, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2/|\mathbf{g}_2| = \sqrt{3}\,(4 - 5t^2), \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_3/|\mathbf{g}_3| = 3 - 12t + 10t^2$$

forman la base ortonormal.

585. ¿Para qué valor de λ la base constituida por los vectores $g_1 = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $g_2 = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4$, $g_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4$, $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4$ es ortogonal? Normalizar esta base.

Resolución. Partiendo de la condición $(e_i, e_k) = 0$ (para $i \neq k$) obtenemos la ecuación $\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0$. Por consiguiente, $\lambda = -1$ y $g_1 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $g_2 = e_1 - e_2 + e_3 + e_4$, $g_3 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $|g_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$.

Por lo tanto, los vectores $e_1' = 0{,}5\,(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $e_2' = 0{,}5\,(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$, $e_3' = 0{,}5\,(e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$, $e_4' = 0{,}5\,(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$, forman la base ortonormal.

586. ¿Para qué valores de α y β la base constitutida por los vectores $e_1' = \frac{\alpha}{3} e_1 + \frac{1-\alpha}{3} e_2 + \beta e_3$, $e_2' = \frac{1-\alpha}{3} e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3} e_3$, $e_3' = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3} e_2 + \frac{1-\alpha}{3} e_3$ es ortonormal?

Resolución. Partiendo de las condiciones $|e_i'| = 1$, $(e_i', e_k') = 0$ (cuando $i \neq k$), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

De la última ecuación hallamos $\beta = -\alpha(\alpha - 1)/3$. Sustituyendo este valor de β en la primera ecuación, tenemos

$$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2(1-\alpha^2)^2 = 9;\quad 1 - 2(1-\alpha)\alpha + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9;$$
$$(1 - \alpha + \alpha^2)^2 = 9.$$

Puesto que $1 - \alpha^2 + \alpha > 0$ para los valores reales de α, entonces $1 - \alpha + \alpha^2 = 3$, o sea, $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Por consiguiente, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = -2/3$, $\beta_2 = 2/3$.

De suerte que obtenemos dos bases ortonormales:

$$e_1^{(1)} = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{2}{3} e_3,\quad e_2^{(1)} = \frac{2}{3} e_1 - \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3,$$
$$e_3^{(1)} = -\frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3,$$
$$e_1^{(2)} = \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3,\quad e_2^{(2)} = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 +$$
$$+ \frac{2}{3} e_3,\quad e_3^{(2)} = \frac{2}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3.$$

2. Transformaciones ortogonales. Una transformación lineal A se llama *ortogonal* si no hace cambiar la longitud de un vector cualquiera de un espacio euclídeo, o sea si $|Ax| = |x|$. Con ello la transformación ortogonal A no hace cambiar el producto escalar de dos vectores cualesquiera x e y del espacio euclídeo, o sea, $(Ax, Ay) = (x, y)$. De este modo,

$$\frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{(Ax, Ay)}{|Ax| \cdot |Ay|}.$$

De la última igualdad se desprende que la transformación ortogonal A no hace cambiar el ángulo entre dos vectores cualesquiera x e y.

La transformación ortogonal convierte una base ortonormal cualquiera en otra ortonormal. Por el contrario, si una transformación lineal convierte una base ortonormal cualquiera en otra ortonormal, tal transformación es ortogonal.

587. ¿Es ortogonal una transformación que convierte cada vector geométrico en un vector que sea simétrico respecto a cierto plano fijo?

588. ¿Es ortogonal una transformación que consiste en girar un vector cualquiera que esté en el plano xOy en un ángulo fijo α?

589. ¿Para qué valores de λ la transformación A definida por la igualdad $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ es ortogonal?

590. ¿Es ortogonal una transformación A definida en una base ortonormal cualquiera $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \qquad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0,$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1?$$

591. ¿Es ortogonal la transformación $\mathbf{A}\mathbf{x} = -\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$, donde $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$ es un vector arbitrario y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ es la base ortonormal?

592. Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$, una base ortonormal. Demostrar que A es una transformación ortonormal si $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cos\alpha + \mathbf{e}_4 \operatorname{sen}\alpha$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_3 \operatorname{sen}\alpha + \mathbf{e}_4 \cos\alpha$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_5 \cos\beta + \mathbf{e}_6 \operatorname{sen}\beta$, $\mathbf{A}\mathbf{e}_6 = -\mathbf{e}_5 \operatorname{sen}\beta + \mathbf{e}_6 \cos\beta$.

§ 7. Formas cuadráticas

Se llama *forma cuadrática* de variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a un polinomio de segundo grado respecto a estas variables que no contenga un término independiente ni términos de primer grado.

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la forma cuadrática de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y λ es un número real cualquiera, entonces $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si $n = 2$, entonces

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Si $n = 3$, entonces

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

A continuación todos los enunciados y definiciones vamos a citarlos para la forma cuadrática de tres variables.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

en la cual $a_{ik} = a_{ki}$ se llama *matriz de la forma cuadrática* $f(x_1, x_2, x_3)$ y el determinante correspondiente se denomina *determinante de esta forma cuadrática.*

Como A es una matriz simétrica, las raíces λ_1, λ_2, λ_3 de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

son números reales.

Sean

$$\mathbf{e}_1' = b_{11}\mathbf{e}_1 + b_{21}\mathbf{e}_2 + b_{31}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_2' = b_{12}\mathbf{e}_1 + b_{22}\mathbf{e}_2 + b_{32}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_3' = b_{13}\mathbf{e}_1 + b_{23}\mathbf{e}_2 + b_{33}\mathbf{e}_3$$

vectores propios normalizados correspondientes a los números característicos λ_1, λ_2, λ_3 en la base ortonormal $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. A su vez, los vectores $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ forman una base ortonormal. La matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz de paso de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a la base $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$.

Las fórmulas de transformación de las coordenadas al pasar a la nueva base ortonormal tienen la forma

$$x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3',$$
$$x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3',$$
$$x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'.$$

Transformando con ayuda de estas fórmulas la forma cuadrática $f(x_1, x_2, x_3)$ obtenemos la forma cuadrática

$$f(x_1', x_2', x_3') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$$

que no contiene términos con los productos $x_1'x_2'$, $x_1'x_2'$, $x_2'x_3'$.

Se suele decir que la forma cuadrática $f(x_1, x_2, x_3)$ está reducida a la *forma canónica* con ayuda de la transformación ortogonal B. Se razonaba suponiendo que los números característicos λ_1, λ_2, λ_3 son distintos. Mostraremos en los problemas cómo se debe proceder si hay números característicos iguales.

593. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 27$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 3$. Escribimos la ecuación cuadrática

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } \lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0,$$

o sea, los números característicos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 28$.

Determinamos los vectores propios. Si $\lambda = 2$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 25\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 + \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, $\xi_2 = 5\xi_1$. Haciendo $\xi_1 = c$, tenemos $\xi_2 = 5c$, o sea, el vector propio $\mathbf{u} = c(\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2)$.

Si $\lambda = 28$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} -\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 - 25\xi_2 = 0. \end{cases}$$

En este caso obtenemos el vector propio $\mathbf{v} = c\,(-5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Para normalizar los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ hay que tomar $c = 1/\sqrt{1^2 + 5^2} = 1/\sqrt{26}$. De suerte que hemos encontrado los vectores propios normalizados $\mathbf{e}_1' = (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2)/\sqrt{26}$, $\mathbf{e}_2' = (-5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{26}$.

La matriz de paso de la base ortonormal $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a la base ortonormal $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{26} & -5/\sqrt{26} \\ 5/\sqrt{26} & 1/\sqrt{26} \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos las fórmulas de transformación de las coordenadas

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\,x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x_2', \qquad x_2 = \frac{5}{\sqrt{26}}\,x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x_2'.$$

Así, pues,

$$f = 27\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\,x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x_2'\right)^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\,x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x_2'\right) \times$$
$$\times\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\,x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x_2'\right) + 3\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\,x_2' + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x_2'\right)^2 = 2x_1'^2 + 28x_2'^2.$$

Este resultado se puede obtener inmediatamente, puesto que $f = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$.

594. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{22} = 8$. Resolvemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 10.$$

Determinamos los vectores propios. Cuando $\lambda = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + 8\xi_2 = 0 \end{cases}$$

que tiene la solución $\xi_1 = 2c$, $\xi_2 = -c$, o sea, $\mathbf{u} = c\,(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

Cuando $\lambda = 10$, tenemos

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \end{cases}$$

de donde $\xi_1 = c$, $\xi_2 = 2c$, o sea, $\mathbf{v} = c\,(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$.

Tomando $c = 1/\sqrt{2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{5}$, encontramos los vectores propios normalizados $\mathbf{e}_1' = (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$, $\mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$.

La matriz de paso a la nueva base (la matriz de la transformación ortogonal) tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas de transformación de las coordenadas se escribirán así:

$$x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2',\quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'.$$

Por consiguiente,

$$f=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2'\right)^2+8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2'\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'\right)+8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'\right)^2=10x_2'^2.$$

Se puede resolver este problema más sencillamente. Notemos que $f=2(x_1+2x_2)^2$; por eso se puede tomar $x_2'=(x_1+2x_2)/\sqrt{1+4}=(x_1+2x_2)/\sqrt{5}$, $x_1'=(2x_1-x_2)/\sqrt{5}$ (la segunda igualdad está escrita teniendo en cuenta la ortogonalidad de la transformación); puesto que $x_1+2x_2=\sqrt{5}x_2'$, entonces $f=10x_2'^2$.

595. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3.$$

Resolución. Aquí $a_{11}=3$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=0$, $a_{23}=2$. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0;\quad (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-4(1-\lambda)+4(3-\lambda)=0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-8(2-\lambda)=0;\quad (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3-8)=0,$$
$$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=0;\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5.$$

Determinamos los vectores propios correspondientes a los números característicos hallados. Para encontrar las coordenadas de los vectores propios hallamos tres sistemas de ecuaciones lineales:

$$1)\ \lambda=2,\qquad 2)\ \lambda=-1,\qquad 3)\ \lambda=5.$$

$$\left\{\begin{aligned}\xi_1+2\xi_2&=0,\\ 2\xi_1+2\xi_3&=0,\\ 2\xi_2-\xi_3&=0;\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}4\xi_1+2\xi_2&=0,\\ 2\xi_1+3\xi_2+2\xi_3&=0,\\ 2\xi_2+2\xi_3&=0,\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}-2\xi_1+2\xi_2&=0,\\ 2\xi_1-3\xi_2+2\xi_3&=0,\\ 2\xi_2-4\xi_3&=0;\end{aligned}\right.$$

$$\xi_1=2c,\ \xi_2=-c,\ \xi_3=-2c,\ \xi_1=c,\ \xi_2=-2c,\ \xi_3=2c,$$
$$\xi_1=2c,\quad \xi_2=2c,\quad \xi_3=c,\quad \mathbf{u}=c(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3),$$
$$\mathbf{v}=c(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3),\quad \mathbf{w}=c(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3),$$
$$\mathbf{e}_1'=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3);\quad \mathbf{e}_2'=\frac{1}{3}(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3);$$
$$\mathbf{e}_3'=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3).$$

La matriz de la transformación ortogonal tiene la forma

$$B=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & -2/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Las fórmulas de transformación de las coordenadas

$$x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',\quad x_2=-\frac{1}{3}x_1'-\frac{2}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',$$
$$x_3=-\frac{2}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'+\frac{1}{3}x_3'.$$

De este modo, $f = 2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$.

596. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 6$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 2$, $a_{23} = -4$. Resolviendo la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

encontramos los números característicos $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$.

Cuando $\lambda = 7$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \end{cases}$$

que se reduce a una sola ecuación $\xi_1 = 2\xi_2 + 2\xi_3$. La solución de este sistema se puede escribir de la forma $\xi_1 = 2a + 2b$, $\xi_2 = a$, $\xi_3 = b$. Como resultado obtenemos una familia de vectores propios $\mathbf{u} = 2(a + b)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$ que depende de dos parámetros a y b.

Cuando $\lambda = -2$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 8\xi_1+2\xi_2+4\xi_3=0, \\ 2\xi_1+5\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2+5\xi_3=0. \end{cases}$$

Resolviendo, por ejemplo, las dos últimas ecuaciones, tenemos $\xi_1/9 = \xi_2/(-18) = \xi_3/(-18)$, o bien $\xi_1 = -\xi_2/2 = -\xi_3/2$; $\xi_1 = c$, $\xi_2 = -2c$, $\xi_3 = -2c$. Así, pues, obtendremos una familia monoparamétrica de los vectores propios $\mathbf{v} = c\,(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$.

En la familia de los vectores propios $\mathbf{u} = 2(a + b)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$ escogemos dos vectores ortogonales cualesquiera. Haciendo, por ejemplo, $a = 0$, $b = 1$, *obtenemos el vector propio* $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. *Seleccionamos los parámetros* a y b de modo que se cumpla la igualdad $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = 0$. Entonces obtendremos la ecuación $2\cdot 2(a + b) + b = 0$, o sea, $4a + 5b = 0$. Ahora se puede tomar $a = 5$, $b = -4$; de aquí encontramos el otro vector propio de la familia examinada: $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$.

De suerte que hemos obtenido tres vectores ortogonales de par en par: $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Los vectores propios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ corresponden al número característico $\lambda = 7$ y el vector propio $\mathbf{v}$ corresponde al número característico $\lambda = -2$ cuando $c = 1$.

Normalizando estos vectores, obtendremos una nueva base ortonormal, con ello la matriz de paso a la nueva base tiene la forma

$$B=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) & 1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las fórmulas de transformación de las coordenadas $x_1=$ $=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{3\sqrt{5}}x_2'+\frac{1}{3}x_3'$, $x_2=\frac{\sqrt{5}}{3}x_2'-\frac{2}{3}x_3'$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'-\frac{4}{3\sqrt{5}}\times$ $\times x_2'-\frac{2}{3}x_3'$ a la forma cuadrática dada, obtenemos $f=7x_1'^2+7x_2'^2-2x_3'^2$.

Capítulo VI. Introducción al análisis

§ 1. Errores absoluto y relativo

Sea a un número aproximado que sustituye en los cálculos al número exacto A.

Se llama *error absoluto del número aproximado* a, al valor absoluto de la diferencia entre este número y el número exacto respectivo: $|A - a|$.

Se denomina *error absoluto límite* a un número menor posible Δ, que satisface la desigualdad $|A - a| \leqslant \Delta$.

El número exacto A se encuentra dentro de los límites $a - \Delta \leqslant A \leqslant$ $\leqslant a + \Delta$, o bien $A = a \pm \Delta$.

Ha recibido el nombre de *error relativo* del número aproximado a, la relación entre el error absoluto de este número y el número exacto respectivo: $|A - a|/A$.

Se llama *error relativo límite* a un número menor posible δ, que satisface la igualdad $|A - a|/A \leqslant \delta$.

Puesto que prácticamente $A \approx a$, como error relativo límite se toma el número $\delta = \Delta/a$ (expresado de ordinario en tanto por ciento).

Es justa la desigualdad $a(1 - \delta) \leqslant A \leqslant a(1 + \delta)$.

Se dice que el número aproximado positivo a escrito en la forma de un desarrollo decimal tiene *n signos (cifras) exactos* si el error absoluto de este número no excede de la mitad de la unidad de n-ésimo orden.

Cuando $n > 1$, *como error relativo límite del número aproximado* a con la primera cifra significativa k se puede tomar el número $\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Si se conoce que

$$\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{1}$$

entonces el número a tiene n signos exactos.

El error absoluto límite de la suma algebraica de varios números es igual a la suma de los errores absolutos límites de los sumandos.

El error relativo de la suma de sumandos positivos no supera el mayor entre los errores relativos de estos sumandos.

El error relativo límite del producto y del cociente de números aproximados es igual a la suma de los errores relativos límites de estos números.

El error relativo límite de la potencia de un número aproximado es igual al producto del error relativo límite de este número por el exponente de la potencia.

597. El ángulo medido por el teodolito resulta igual a $22°20'30'' \pm$ $\pm 30''$. ¿Cuál es el error relativo de la medición?

Resolución. El error absoluto $\Delta = 30''$. Entonces el error relativo

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22°20'30''} \cdot 100\% = 0{,}04\%.$$

598. Determinar el número de signos exactos y escribir respectivamente el valor aproximado de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}806\ldots$ si el error relativo es del 0,5%.

Resolución. Como la primera cifra significativa es 9, entonces, utilizando la desigualdad (1), obtendremos $0{,}005 \leqslant \frac{1}{2\cdot 10}\left(\frac{1}{10}\right)^{(n-1)}$, o sea, $n = 2$. Por lo tanto, $g = 9{,}8$.

599. Se conoce que el error relativo límite del número $\sqrt{19}$ es igual al 0,1%. ¿Cuántos signos exactos se contiene en este número?

Resolución. Aquí la primera cifra significativa es 4, el error relativo límite $\delta = 0{,}001 = 10^{-3}$. En razón de la desigualdad (1) tenemos $0{,}001 \leqslant \frac{1}{2\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, de donde $n = 3$. Por consiguiente, $\sqrt{19} = 4{,}36$ (por las tablas de cuatro signos $\sqrt{19} = 4{,}3589$).

600. ¿Cuántos signos exactos contiene el número $A = 3{,}7563$ si el error relativo es igual al 1%?

Resolución. La primera cifra exacta es 3, por eso $0{,}01 \leqslant \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, de donde $n = 2$. El número A se debe escribir así: $A = 3{,}8$.

601. El área de un cuadrado es igual a 25,16 cm² (con la precisión hasta 0,01 cm²). ¿Con qué error relativo y con cuántos signos exactos se puede determinar el lado del cuadrado?

Resolución. El lado buscado $x = \sqrt{25{,}16}$. El error relativo del lado del cuadrado $\delta = (1/2)\cdot(0{,}01/25{,}16)$, donde 0,01 es error absoluto del área, o sea, $\delta = 0{,}0002$. La primera cifra significativa del número que mide el lado del cuadrado es 5. Resolviendo la desigualdad (1) para $k = 5$, obtendremos $(5+1)\cdot 0{,}0002 \leqslant 1/10^{n-1}$, o bien, $1{,}2\cdot 10^{-3} \leqslant 1/10^{n-1}$. De ello $n = 3$.

602. ¿Con cuántos signos exactos se puede determinar el radio de un círculo si se conoce que su área es igual a 124,35 cm² (con precisión de hasta 0,01 cm²)?

603. Hallar el error relativo límite al calcular la superficie completa de un cono truncado si los radios de sus bases $R = 23{,}64 \pm 0{,}01$ (cm), $r = 17{,}31 \pm 0{,}01$ (cm), la generatriz $l = 10{,}21 \pm 0{,}01$ (cm); el número $\pi = 3{,}14$.

604. El número $g = 9{,}8066$ es el valor aproximado de la aceleración de la gravedad (para la latitud de 45°) con cinco signos exactos. Hallar su error relativo.

605. Calcular el área de un rectángulo cuyos lados tienen $95{,}73 \pm 0{,}01$ (m) y $94{,}5 \pm 0{,}01$ (m). Determinar el error relativo del resultado y el número de signos exactos.

§ 2. Función de una variable independiente

Se llaman números *reales* a los números racionales e irracionales.

Se denomina *valor absoluto* de un número real a, a un número no negativo $|a|$ definido del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Sean dados dos conjuntos no vacíos X e Y. Si a cada elemento x del conjunto X se pone en correspondencia, según cierta regla, un, y sólo un, elemento y del Y, se dice que sobre el conjunto X está definida la *función* f (o la *aplicación*) con el conjunto de valores Y. Esto se puede escribir así: $x \in X$, $X \xrightarrow{f} Y$, o bien, f: $X \to Y$, donde el conjunto X se llama *campo de definición* de la función y el conjunto Y constituido por todos los números de la forma $y = f(x)$ se denomina *conjunto de valores* de la función. El campo de definición de la función f se designa por $D(f)$ y el conjunto de valores, por $E(f)$. El valor de la función $f(x)$, cuando $x = a$, se connota mediante $f(a)$.

El campo de definición de una función representa, en casos elementales: el *intervalo abierto* $]a, b[$, o sea, el conjunto de los valores de x que satisfacen la condición $a < x < b$; un *segmento* (o sea, un *intervalo cerrado*) $[a, b]$, es decir el conjunto de los valores de x que satisfacen la condición $a \leqslant x \leqslant b$; un *intervalo semiabierto* $]a, b]$ (o sea, $a < x \leqslant b$) o bien $[a, b[$ (o sea, $a \leqslant x < b$); un *intervalo infinito* $]a, +\infty[$ (o sea, $a < x < +\infty$) o bien $]-\infty, b[$ (o sea, $-\infty < x < b$) o bien $]-\infty, +\infty[$ (o sea, $-\infty < x < +\infty$); un conjunto de varios intervalos abiertos o cerrados, etc.

Se llama *gráfico* de la función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano xOy con las coordenadas $(x; f(x))$, donde $x \in X$.

La función $f(x)$ cuyo campo de definición es simétrico respecto al cero se dice *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo valor de x. El gráfico de una función par es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

La función $f(x)$ cuyo campo de definición es simétrico respecto al cero se dice *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x. El gráfico de una función impar es simétrico respecto al origen de las coordenadas.

La función $f(x)$ se llama *periódica* si existe un número positivo T denominado *período* de la función tal que para todas las x pertenecientes al campo de definición de la función se cumpla la igualdad $f(x + T) = f(x)$. Ha recibido el nombre de *período fundamental* de una función al menor número positivo τ que posee la propiedad indicada.

606. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ si $f(x) = x^2$.

Resolución. Hallamos los valores de la función dada para $x = a$ y $x = b$: $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$. Entonces obtendremos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b.$$

607. Hallar el campo de definición de la función $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x - 1}$.

Resolución. La función dada está definida si $2x - 1 \neq 0$, o sea, si $x \neq 1/2$. Ahora bien, el campo de definición de la función es la unión de dos intervalos: $D(f) = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

608. Hallar el campo de definición de la función $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x - 1}$.

Resolución. La función está definida si $x - 1 \neq 0$ y $1 + x > 0$, o sea, si $x \neq 1$ y $x > -1$. El campo de definición de la función es la unión de dos intervalos: $D(f) =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

609. Hallar el campo de definición de la función

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsen \frac{3x-1}{2}.$$

Resolución. El primer sumando toma valores reales cuando $1 - 2x \geqslant 0$ y el segundo cuando $-1 \leqslant (3x - 1)/2 \leqslant 1$. Ahora bien, para encontrar el campo de definición de la función dada es necesario resolver el sistema de desigualdades: $1 - 2x \geqslant 0$, $(3x - 1)/2 \leqslant 1$, $(3x - 1)/2 \geqslant -1$. Como resultado obtenemos $x \leqslant 1/2$, $x \leqslant 1$, $x \geqslant -1/3$. Por consiguiente, el campo de definición de la función es el segmento $[-1/3, 1/2]$.

610. Hallar el conjunto de valores de las funciones:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2) $f(x) = 2 + 3 \operatorname{sen} x$.

Resolución. 1) Separando del trinomio cuadrático el cuadrado perfecto, obtendremos

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x - 3)^2 - 4.$$

El primer sumando es para todas las x un número no negativo, por eso la función toma valores no menores que -4. De suerte que el conjunto de valores de la función es un intervalo infinito $[-4, +\infty[$.

2) Como el seno toma valores cuyo módulo no excede de la unidad, escribimos la desigualdad $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$, o bien $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$. Multiplicando todos los miembros de esta doble desigualdad por 3 y adicionándoles 2 a cada uno, obtendremos

$$-3 \leqslant 3 \operatorname{sen} x \leqslant 3; \quad -1 \leqslant 2 + 3 \operatorname{sen} x \leqslant 5.$$

Por consiguiente, $E(f) = [-1, 5]$.

611. Hallar los períodos fundamentales de las funciones:

1) $f(x) = \cos 8x$; 2) $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{tg} 4x$.

1) Puesto que el período fundamental de la función $\cos x$ es 2π, entonces el período fundamental de la función $f(x) = \cos 8x$ es igual a $2\pi/8$, o sea, $\pi/4$.

2) Aquí para el primer sumando el período fundamental es igual a $2\pi/6 = \pi/3$ y para el segundo es igual a $\pi/4$. Es evidente que el período fundamental de la función dada es el mínimo común múltiplo de los números $\pi/3$ y $\pi/4$, o sea π.

612. Determinar la paridad o imparidad de las funciones:

1) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \operatorname{sen} x$; 2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$; 4) $f(x) = x^2 + 5x$; 5) $f(x) = \log \frac{x+3}{x-3}$.

Resolución. En los ejercicios que se examinan el campo de definición de cada una de las funciones es simétrico respecto al cero: en los primeros cuatro ejercicios $D(f) =]-\infty, +\infty[$ y en el último ejercicio $D(f) =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

1) Reemplazando x por $-x$ obtendremos

$$f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{(-x)} + 2 \operatorname{sen}(-x) = -x^2 \sqrt[3]{x} - 2 \operatorname{sen} x,$$

o sea, $f(-x) = f(x)$. Por lo tanto, la función dada es impar.

2) Tenemos $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x$, o sea, $f(-x) = f(x)$. De suerte que la función dada es par.

3) Aquí $f(-x) = |x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2}$, o sea, $f(-x) = f(x)$, por consiguiente, la función $f(x)$ es par.

4) Tenemos $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$. Ahora bien, $f(-x) \neq$ $\neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, o sea, la función dada no es ni par ni impar.

5) Hallamos

$$f(-x) = \log\frac{-x+3}{-x-3} = \log\frac{x-3}{x+3} = \log\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} = -\log\frac{x+3}{x-3}\text{, o sea,}$$

$f(-x) = -f(x)$ y, por consiguiente, la función dada es impar.

613. Hallar los campos de definición de las funciones:

1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; 3) $f(x) = \frac{1}{xe^x}$; 4) $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$; 5) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$; 6) $f(x) = \log(3x-1) + 2\log(x+1)$; 7) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

614. Hallar los conjuntos de valores de las funciones:

1) $f(x) = |x| + 1$; 2) $f(x) = 5/x$; 3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; 4) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$; 5) $f(x) = 1 - 3\cos x$; 6) $f(x) = 4^{-x^2}$.

615. Determinar la paridad o imparidad de las funciones:

1) $f(x) = x^4 \operatorname{sen} 7x$; 2) $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$; 3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$; 4) $f(x) = |x| + 2$; 5) $f(x) = |x+2|$; 6) $f(x) = \log\cos x$; 7) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$.

616. Hallar los períodos fundamentales de las funciones:

1) $f(x) = \operatorname{sen} 5x$; 2) $f(x) = -2\cos(x/3) + 1$; 3) $f(x) = \log\cos 2x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

§ 3. Construcción de gráficos de funciones

Al construir los gráficos de funciones se emplean los métodos siguientes: construcción «marcando los puntos»; operaciones con los gráficos (adición, sustracción, multiplicación de los gráficos); transformación de los gráficos (desplazamiento, alargamiento).

Partiendo del gráfico de la función $y = f(x)$ se puede construir los gráficos de las funciones siguientes:

1) $y = f(x - a)$, o sea, el gráfico inicial desplazado a lo largo del eje Ox en la magnitud a;

2) $y = f(x) + b$, o sea, el mismo gráfico desplazado a lo largo del eje Oy en la magnitud b;

3) $y = Af(x)$, o sea, el gráfico inicial alargado A veces a lo largo del eje Oy.

4) $y = f(kx)$, o sea, el mismo gráfico alargado $1/k$ veces a lo largo del eje Ox.

Por lo tanto, a partir del gráfico de la función $y = f(x)$ se puede construir el gráfico de una función de forma $y = Af[k(x - a)] + b$.

617. Construir el gráfico de la función $y = 2x + 1 + \cos x$.

Resolución. El gráfico de la función dada se puede construir sumando los gráficos de dos funciones: $y = 2x + 1$ e $y = \cos x$. El gráfico de la primera función es una recta que se puede construir marcando dos puntos, el gráfico de la segunda función es una cosinusoide (fig. 23).

618. Construir el gráfico de la función

$$y=\begin{cases} 2-x \text{ para } x\leqslant 3, \\ 0,1x^2 \text{ para } x>3. \end{cases}$$

Resolución. Cuando $x<3$, de gráfico sirve una semirrecta y cuando $x\geqslant 3$, de gráfico sirve una rama de una parábola. El gráfico buscado está representado en la fig. 24.

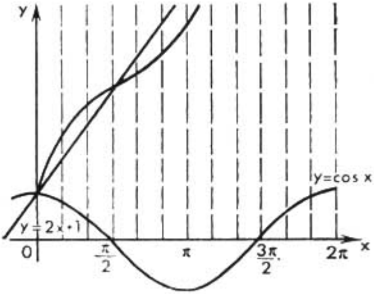


Fig. 23

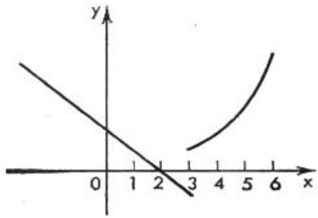


Fig. 24

619. Construir el gráfico de la función $y=2$ sen $(2x-1)$.

Resolución. Transformemos la función dada de modo que tenga la forma $y=2$ sen $2\,(x-1/2)$. Aquí $A=2$, $k=2$, $a=1/2$. En calidad de gráfico

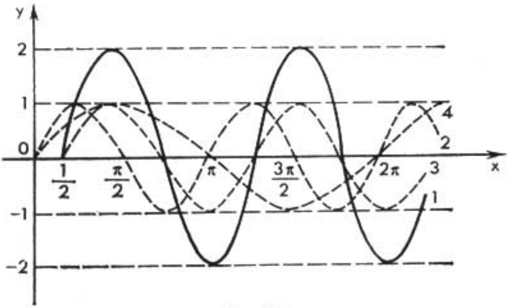


Fig. 25

inicial tomamos el de $y=$ sen x. Luego construimos el gráfico de la función $y=$ sen $2x$ comprimiéndolo dos veces a lo largo del eje de abscisas. Acto seguido construimos el gráfico de la función $y=$ sen $2\,(x-1/2)$ mediante el desplazamiento en 1/2 a la derecha y, por fin, mediante el alargamiento de dos veces a lo largo del eje de ordenadas del último gráfico, obteniendo la representación buscada de la función $y=2$ sen $(2x-1)$ (fig. 25).

Construir los gráficos de las funciones:

620. $y=\frac{x^3-x}{3}$ sobre el segmento $[-4, 4]$.

621. $y = x^2 (2-x)^2$ sobre el segmento $[-3, 3]$.

622. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ en el campo de definición.

623. $y = 0{,}5x + 2^{-x}$ sobre el segmento $[0, 5]$.

624. $y = 2(x-1)^3$ partiendo de la función $y = x^3$.

625. $y=\frac{1}{x^2+4}$. **626.** $y=\frac{x^2+1}{x}$.

627. $y = \operatorname{sen}(3x-2)+1$. **628.** $y = -2\cos(2x+1)$.

629. $y = \operatorname{arcsen}(x-2)$. **630.** $y = x+1+\operatorname{sen}(x-1)$.

631. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

632. $y=\begin{cases} -x^2 \text{ para } x<0, \\ 3x \text{ para } x\geqslant 0, \end{cases}$

633. $y=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<-1, \\ 5 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ x^2+5 & \text{si } x>0. \end{cases}$

§ 4. Límites

Se llama *límite de una sucesión* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ al número a, si para todo número positivo ε, tan pequeño como se desee, existe un número positivo N tal, que $|x_n - a| < \varepsilon$, cuando $n > N$.

En este caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Se denomina *límite de la función* $f(x)$ para $x \to a$ al número A si para todo número $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se desee, existe un número $\delta > 0$ tal, que $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $|x-a| < \delta$. Esto se escribe así: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Análogamente, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ si $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $|x| > N$.

Se escribe convencionalmente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si $|f(x)| > M$ cuando $|x-a| < \delta$, donde M es un número positivo arbitrario.

En este caso la función $f(x)$ se llama magnitud *infinita (infinitamente grande)* cuando $x \to a$.

Si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, la función $\alpha(x)$ se denomina magnitud *infinitésima (infinitamente pequeña)* cuando $x \to a$.

Si $x < a$ y $x \to a$, entonces se escribe $x \to a - 0$; si $x > a$ y $x \to a$, se escribe $x \to a + 0$. Los números $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ y $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ se denominan *límite izquierdo* y *límite derecho*, respectivamente, de la función $f(x)$ en el punto a.

Para la existencia del límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$, es necesario y suficiente que $f(a-0) = f(a+0)$.

El cálculo práctico de los límites se funda en los teoremas siguientes.

Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Se utilizan también los límites siguientes:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (*primer límite notable*);

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ \ldots$ (*segundo límite notable*).

El logaritmo de un número x que tiene por base e se llama *logaritmo natural* y se designa por $\ln x$.

Al resolver los ejercicios es útil tener en cuenta las igualdades siguientes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x} = m.$$

634. Mostrar que para $n\to\infty$ la sucesión $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$ tiene por límite el número 2.

Resolución. Aquí el n-ésimo término de la sucesión es $x_n = 2 + 1/n$. Por consiguiente, $x_n - 2 = 1/n$. Damos de antemano un número positivo ε. Escogemos n tan grande que se cumpla la desigualdad $1/n < \varepsilon$. Para esto es suficiente tomar $n > 1/\varepsilon$. Con tal selección de n obtenemos $|x_n - 2| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim x_n = 2$.

635. Mostrar que para $n\to\infty$ la sucesión $7/3,\ 10/5,\ 13/7,\ \ldots$ $\ldots,\ (3n+4)/(2n+1),\ \ldots$ tiene por límite el número $3/2$.

Resolución. Aquí $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$. Determinemos, para qué valor de n se cumple la desigualdad $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$; como $2(2n+1) > 5/\varepsilon$, entonces $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$. De suerte que si $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$, entonces $|x_n - 3/2| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x = 3/2$.

Haciendo $\varepsilon = 0{,}1$, sacamos la conclusión de que la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}1$ se cumple cuando $n > 12$ (por ejemplo, cuando $n = 13$). Análogamente, la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}01$ se cumple para $n > 124{,}5$ (por ejemplo, para $n = 125$) y la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}001$ se cumple si $n > 1249{,}5$ (por ejemplo si $n = 1250$).

636. Hallar el $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$.

Resolución. Como $x\to 4$, el numerador de la fracción tiende al número $5\cdot 4 + 2 = 22$ y el denominador al número $2\cdot 4 + 3 = 11$, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3} = \dfrac{22}{11} = 2$.

637. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7}$.

Resolución. El numerador y el denominador de la fracción crecen indefinidamente cuando $x\to\infty$. En tal caso se dice que tiene lugar la indeterminación de forma ∞/∞. Dividiendo por x el numerador y el denominador de la fracción, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+5/x}{2+7/x} = \frac{3}{2},$$

ya que cuando $x \to \infty$ cada una de las fracciones $5/x$ y $7/x$ tiende a cero.

638. Hallar el $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Resolución. Aquí el numerador y el denominador de la fracción cuando $x \to 3$ tiende a cero (suele decir que se obtiene la indeterminación de forma 0/0). Tenemos

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x};$$

si $x \neq 3$, entonces $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}$. Pero cuando $x\to 3$, la fracción $\frac{x+3}{x}$ tiende al número $\frac{3+3}{3}=2$. De suerte que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2$.

639. Hallar el $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Resolución. Aquí tiene lugar la indeterminación de forma 0/0. Descompongamos en factores el numerador y el denominador de la fracción:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x+1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

640. Hallar el $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

Resolución. Aquí se tiene la indefinición de forma 0/0. Tenemos

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

El numerador de la fracción tiende a 300 y el denominador tiende a cero, o sea, es una infinitésima, por consiguiente, la fracción que se examina es una magnitud variable infinita y $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-2x^2+100x}=\infty$.

641. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Resolución. Multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por la suma $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

642. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

Resolución. Haciendo $1+x=y^5$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

643. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{x}$.

Resolución. Utilizando el primer límite notable, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot\operatorname{sen} mx}{mx}=m\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}=m.$$

644. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2(5x/2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(5x/2)}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Aquí hemos utilizado el resultado del ejercicio precedente, tomando $m=5/2$.

645. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Resolución. Es una indeterminación de forma ∞/∞. Dividimos el numerador y el denominador de la fracción por la mayor potencia de x, o sea, por x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2+4/x^3}{4+3/x+2/x^2+1/x^3}=\frac{1}{4}.$$

646. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Resolución. Dividimos el numerador y el denominador por x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x^4}{\sqrt{1+3/x^7+4/x^8}}=\frac{3}{1}=3.$$

647. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

Resolución. Aquí tiene lugar la indeterminación de forma $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos la expresión dada por $\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+3/x^2}}=\frac{4}{2}=2.$$

648. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Resolución. Dividiendo el numerador de la fracción por el denominador, separamos la parte entera:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

De este modo, cuando $x\to\infty$ la función dada es una potencia cuya base tiende a la unidad, mientras que el exponente tiende a infinito (indeterminación de la forma 1^∞). Transformando la función de modo que se utilice el segundo límite notable, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x-7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-3x}{1-3/x+7/x^2}}.$$

Como $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ cuando $x\to\infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8.$$

649. Hallar los límites izquierdo y derecho de la función $f(x)=\frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ cuando $x\to 3$.

Resolución. Si $x\to 3-0$, entonces $1/(x-3)\to-\infty$ y $2^{1/(x-3)}\to 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=1/3$. Si empero $x\to 3+0$, entonces $1/(x-3)\to +\infty$, $2^{1/(x-3)}\to+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$.

650. Hallar los límites izquierdo y derecho de la función $f(x)=e^{1/(x-a)}$ cuando $x\to a$.

Resolución. Si $x\to a-0$, entonces $1/(x-a)\to-\infty$ y $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=0$. Si empero $x\to a+0$, entonces $1/(x-a)\to+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

651. Mostrar que cuando $n\to\infty$ la sucesión $1/2$, $5/3$, $9/4$, ..., $(4n-3)/(n+1)$, ... tiene un límite igual a 4.

652. Mostrar que cuando $n\to\infty$ la sucesión 1, $1/3$, $1/5$, ..., $1/(2n-1)$, ... es una magnitud infinitésima.

Hallar los límites siguientes:

653. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

654. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

655. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

656. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

657. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

658. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{sen} nx}$. **659.** $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}$.

660. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\pi-4x}$. **661.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi-2x}$.

662. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

Indicación: hacer $\pi/2-x=\alpha$.

663. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$.

664. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

665. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

666. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-1}{x^2}$. **667.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

668. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

669. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. **670.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

671. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{x}$. **672.** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}$.

673. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$.

674. $\lim\limits_{x\to \infty} (\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x})$.

675. $\lim (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

676. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-5^x}{1-e^x}$. **677.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$.

678. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1+x)}$. 679. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-1}{x}$.

680. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

Indicación. Poner $x = t^4$.

681. $\lim\limits_{x\to \pm 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$. 682. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t+\operatorname{sen} t}{t-\operatorname{sen} t}$.

683. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} x}{\ln(x+1)}$. 684. $\lim\limits_{x\to 5-0} 10^{1/(x-5)}$.

685. $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{sen} x$. 686. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$.

687. Hallar el $\lim\limits_{t\to \infty} t(\sqrt[t]{a}-1)$ (donde $t>0$).

Indicación: hacer $x = 1/t$, donde $x \to 0$.

688. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

689. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

690. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. 691. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

Indicación. Reducir las fracciones a un denominador común.

692. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{x\ln x}$. 693. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

Indicación: tener en cuenta que $x^x = e^{x\ln x}$.

694. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$.

695. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

696. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

697. $\lim\limits_{\alpha\to 0} (2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

698. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.

699. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$.

§ 5. Comparación de infinitésimos

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ infinitésimos cuando $x \to a$.

1. Si el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, entonces se dice que α es un *infinitésimo de orden superior* en comparación con β. En este caso se escribe $\alpha = o(\beta)$.

2. Si el $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\alpha} = m$, donde m es un número distinto de cero, entonces se dice que α y β son *infinitésimos del mismo orden*. En particular, si el $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, los infinitésimos β y β se llaman *equivalentes*. La notación $\alpha \sim \beta$ significa que α y β son infinitésimos equivalentes.

Si $\frac{\alpha}{\beta} \to \infty$, esto quiere decir que el $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Por lo tanto, β es un infinitésimo de orden superior en comparación con α, o sea, $\beta = o(\alpha)$.

3. Si α^k y β son infinitésimos del mismo orden y $k > 0$, se dice que el infinitésimo β tiene el *orden* k en comparación con α.

Señalemos algunas propiedades de los infinitésimos:

1ª. *El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo de orden superior al de los factores*, o sea, si $\gamma = \alpha\beta$, entonces $\gamma = o(\alpha)$ y $\gamma = o(\beta)$.

2ª. *Los infinitésimos* α y β *son equivalentes si, y sólo si, su diferencia* $\alpha - \beta = \gamma$ *es un infinitésimo de orden superior en comparación con* α y β, o sea, si $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$.

3ª. *Si la relación entre dos infinitésimos tiene un límite, entonces este límite no se cambiará al sustituir cada una de los infinitésimos por otro equivalente*, o sea, si el $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = m$.

Es útil tener en cuenta la equivalencia de los infinitésimos siguientes: si $x \to 0$, entonces
$\operatorname{sen} x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{arcsen} x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$.

700. Sea t un infinitésimo. Comparar los infinitésimos $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ y $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{5+2t^3}{3+2t} = \frac{5}{3}.$$

Como el límite de la relación entre α y β es un número distinto de cero, α y β son infinitésimos del mismo orden.

701. Comparar las magnitudes infinitésimas $\alpha = t \operatorname{sen}^2 t$ y $\beta = 2t \operatorname{sen} t$ cuando $t \to 0$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{sen}^2 t}{2t \operatorname{sen} t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} = 0,$$

o sea, $\alpha = o(\beta)$.

702. Comparar las magnitudes infinitésimas $\alpha = t \ln(1+t)$, $\beta = t \operatorname{sen} t$ cuando $t \to 0$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{t \ln(1+t)}{t \operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\operatorname{sen} t}{t}} = 1,$$

o sea, $\alpha \sim \beta$.

703. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

Resolución. Sustituimos el numerador y el denominador de la fracción por los infinitésimos equivalentes: $\ln(1+3x \operatorname{sen} x) \sim 3x \operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$. Entonces obtendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \operatorname{sen} x}{x^2} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 3.$$

704. Determinar el orden de la magnitud infinitésima $y = xe^x$ en comparación con el infinitésimo x.

705. Determinar el orden de la magnitud infinitésima $y = \sqrt{1 + x \operatorname{sen} x} - 1$ en comparación con el infinitésimo x.

706. Determinar el orden del infinitésimo $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$ en comparación con x.

707. Comparar los infinitésimos $\alpha = t^2 \operatorname{sen}^2 t$ y $\beta = t \operatorname{tg} t$ si $t \to 0$.

708. Comparar los infinitésimos $\alpha = (1+x)^m - 1$ y $\beta = mx$ si $x \to 0$ y m es un número racional positivo.

709. Comparar los infinitésimos $\alpha = a^x - 1$ y $\beta = x \ln a$.

Hallar los límites siguientes:

710. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$.   **711.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

Indicación: sustituir el numerador y el denominador por infinitésimos equivalentes.

712. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$.

713. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

714. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$.

715. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

Indicación. Representar $\cos x$ en forma $1-(1-\cos x)$.

716. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

717. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(5^\alpha-1)(4^\alpha-1)}{(3^\alpha-1)(6^\alpha-1)}$.

718. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$.

Indicación. Dividir por dos el numerador y el denominador.

§ 6. Continuidad de una función

La función $f(x)$ se llama *continua en el punto* a si: 1) esta función está definida en cierto entorno del punto a; 2) existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) este límite es igual al valor de la función en el punto a, o sea, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Designando $x - a = \Delta x$ (incremento del argumento) y $f(x) - f(a) = \Delta y$ (incremento de la función), la condición de continuidad se puede escribir así: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, o sea, *la función $f(x)$ es continua en el punto a si, y sólo si, en este punto al incremento infinitésimo del argumento le corresponde el incremento infinitésimo de la función.*

Si la función es continua en cada punto de cierto campo (intervalo, segmento, etc.), se denomina *continua en* este *campo.*

El punto a que pertenece al campo de definición de la función o que es el de frontera para este campo se llama *punto de discontinuidad* si en él se altera la condición de continuidad de la función.

Si existen los límites finitos $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ y $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ y no todos los tres números $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ son iguales entre sí, entonces a se llama *punto de discontinuidad de primera especie.*

Los puntos de discontinuidad de primera especie se subdividen, a su vez, en *puntos de discontinuidad evitable* (cuando $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, o sea,

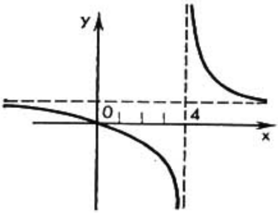


Fig. 26

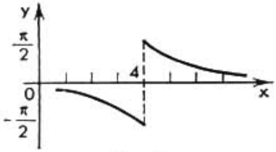


Fig. 27

cuando los límites izquierdo y derecho de la función en el punto a son iguales entre sí, pero no son iguales al valor de la función en este punto y en *puntos de salto* (cuando $f(a-0) \neq f(a+0)$, o sea, cuando los límites izquierdo y derecho de la función en el punto a son distintos); en el último caso la diferencia $f(a+0) - f(a-0)$ se denomina *salto* de la función en el punto a.

Los puntos de discontinuidad que no son de la primera especie se llaman *puntos de discontinuidad de segunda especie.* En los puntos de discontinuidad de segunda especie no existe ni siquiera uno de los límites unilaterales.

La suma y el producto de un número finito de funciones continuas es una función continua. El cociente obtenido por la división de dos funciones continuas es una función continua en todos los puntos en que el divisor no sea igual a cero.

719. Mostrar que cuando $x=4$ la función $y=\dfrac{x}{x-4}$ tiene una discontinuidad.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

Así, pues, la función, si $x \to 4$, no tiene un límite finito, ni derecho ni izquierdo. Por lo tanto, $x = 4$ es el punto de discontinuidad de segunda especie (fig. 26).

720. Mostrar que cuando $x=4$ la función $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-4}$ presenta una discontinuidad.

Resolución. Si $x \to 4-0$, entonces $1/(x-4) \to -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\pi/2$. Pero si $x \to 4+0$, entonces $1/(x-4) \to +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \pi/2$. De suerte que cuando $x \to 4$ la función tiene un límite finito, tanto izquierdo como derecho, además ellos son diferentes. Por consiguiente, $x = 4$ es un punto de discontinuidad de primera especie, o sea, un punto de salto. El salto de la función en este punto es igual a $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ (fig. 27).

721. Mostrar que cuando $x=5$ la función $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ presenta una discontinuidad.

Resolución. En el punto $x = 5$ la función no está definida, ya que al sustituir, obtenemos la indeterminación $0/0$. En otros puntos la fracción se puede simplificar dividiendo por $x-5$, ya que $x-5 \neq 0$. Por lo tanto, $y = x+5$ si $x \neq 5$, es fácil ver que $\lim\limits_{x\to 5-0} y = \lim\limits_{x\to 5+0} y = 10$.

De este modo, cuando $x = 5$ la función tiene una discontinuidad evitable, si se conviene en que $y = 10$ para $x = 5$.

Por lo tanto, se puede considerar que la función $y = (x^2-25)/(x-5)$ es continua para todos los valores de x si se toma que la igualdad $(x^2-25)/(x-5) = x+5$ es válida para todos los valores de x no excluyendo tampoco $x = 5$. En este caso el gráfico de la función es la recta $y = x+5$.

722. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{2^{1/(x-2)}-1}{2^{1/(x-2)}+1}$.

723. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

724. ¿Cuál es el carácter de la discontinuidad de la función $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$ en el punto $x=1$?

725. ¿Cuál es el carácter de la discontinuidad de la función $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el punto $x=0$?

726. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

727. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

728. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

729. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

730. Investigar si es continua o no la función $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ sobre el segmento: 1) $[2, 5]$; 2) $[4, 10]$; 3) $[0, 7]$.

731. Investigar si es continua o no la función $y=\dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$ sobre el segmento: 1) $[6, 10]$; 2) $[-2, 2]$; 3) $[-6, 6]$.

Capítulo VII. Cálculo diferencial de funciones de una variable independiente

§ 1. Derivada y diferencial

1. Derivación de funciones explícitas. Sean x_1 y x_2 los valores del argumento e $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ los valores respectivos de la función $y = f(x)$. La diferencia $\Delta x = x_2 - x_1$ se llama *incremento del argumento* y la diferencia $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ se denomina *incremento de la función* en el segmento $[x_1, x_2]$.

Se denomina *derivada* de la función $y = f(x)$ del argumento x el límite de la razón del incremento de la función al del argumento cuando el incremento de este último tiende a cero:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ o bien } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(la derivada se designa también por $\frac{dy}{dx}$).

La derivada es, gráficamente, la pendiente de la tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto x, o sea $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

La derivada es la *velocidad de variación* de la función en el punto x.

La determinación de la derivada se llama *derivación* de la función.

Fórmulas de derivación de las funciones principales

I. $(x^m)' = mx^{m-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

IV. $(e^x)' = e^x$.

V. $(a^x)' = a^x \ln a$.

VI. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

VII. $(\log_a x') = \frac{1}{x \ln a}$.

VIII. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

IX. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

X. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

XI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XII. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIV. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XV. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

XVI. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

XVII. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

XVIII. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{cth} x') = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Reglas principales de derivación

Sean C, una constante; $u = u(x)$, $v = v(x)$, funciones que poseen derivadas. Entonces:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; 7) si $y = f(u)$, $u = u(x)$, o sea, $y = f[u(x)]$, donde las funciones $f(u)$ y $u(x)$ tienen derivadas, entonces

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(regla de derivación de una *función compuesta*).

732. Partiendo de la definición de una derivada (sin aplicar las fórmulas de derivación), hallar la derivada de la función $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Resolución. Damos a x el incremento Δx, entonces y obtendrá el incremento Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Hallamos el incremento de la función:

$$\Delta y = [2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2\,\Delta x + 6x\,\Delta x^2 + 2\,\Delta x^3 + 10x\,\Delta x + 5\,\Delta x^2 - 7\,\Delta x.$$

Hallamos la razón del incremento de la función con respecto al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 + 10x + 5\,\Delta x - 7.$$

Encontramos el límite de esta razón cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 + 10x + 5\,\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Por consiguiente, según la definición de derivada $y' = 6x^2 + 10x - 7$.

733. Partiendo de la definición de derivada, hallar la derivada de la función $y = \sqrt{x}$.

Resolución. Hallamos el incremento de la función $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

De este modo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

De suerte que $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

734. Partiendo de la definición de una derivada, hallar la derivada de la función $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

Resolución. Hallamos

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \\ - \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x.$$

Utilizando la fórmula $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$, obtenemos

$$\Delta y = \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x-x)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\Delta x)} - 1$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(x+\Delta x)} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1.$$

De suerte que $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$.

Partiendo de la definición de derivada hallar las derivadas de las funciones:

735. $y = \dfrac{1}{x^2}$. **736.** $y = \sqrt[3]{x^2}$.

737. $y = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$. **738.** $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$.

739. $y = \dfrac{1}{e^x+1}$. **740.** $y = 2^{x^2}$.

Aplicando las fórmulas y reglas de derivación hallar las derivadas de las funciones siguientes:

741. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

Resolución. $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$.

742. $y = x^2 \cdot e^x$.

Resolución. $y' = x^2(e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2e^x + 2xe^x = xe^x(x+2)$.

743. $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Resolución. $y' = x^3 (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' = x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x =$
$= \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x.$

744. $y = x\sqrt{x}\,(3 \ln x - 2).$

Resolución. Reescribimos la función dada en la forma de $y = x^{3/2} \times$ $\times (3 \ln x - 2)$. Entonces

$$y' = x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3 \ln x - 2) = 3x^{1/2} +$$
$$+ \frac{9}{2} x^{1/2} \cdot \ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x.$$

745. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}.$

Resolución. $y' = \frac{x \cdot (\operatorname{arcsen} x)' - \operatorname{arcsen} x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x}{x^2} =$
$= \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arcsen} x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$

746. $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$

Resolución.

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

747. $y = (2x^3 + 5)^4.$

Resolución. Designemos $2x^3 + 5 = u$; entonces $y = u^4$. Según la regla de derivación de una función compuesta tenemos

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 (2x^3 + 5)^3.$$

748. $y = \operatorname{tg}^6 x.$

Resolución. $y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x.$

749. $y = \cos^2 x.$

Resolución. $y' = 2 \cos x (\cos x)' = -2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x.$

750. $y = \operatorname{sen}(2x + 3).$

Resolución. $y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2 \cos(2x + 3).$

751. $y = \operatorname{tg} \ln x.$

Resolución. $y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}^2 \ln x.$

752. $y = \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3}.$

Resolución. $y' = 3 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{x}{3}\right)' = 3 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3}\right)' = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} \times$
$\times \cos \frac{x}{3}.$

753. $y = \ln (x^2 + 5)$.

Resolución. $y' = \dfrac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)' \cdot = \dfrac{2x}{x^2+5}$.

754. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

Resolución. $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot (\operatorname{tg}(x/2))' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x/2)} \cdot \sec^2 (x/2) \cdot (x/2)' =$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{tg}(x/2) \cos^2 (x/2)} = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(x/2) \cos (x/2)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

755. $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Resolución.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \, \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

756. $y = \ln \left(\sqrt{2 \operatorname{sen} x + 1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x - 1}\right)$.

Resolución.

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}}\right) \cdot \left(\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}} \left(\frac{2 \cos x}{2\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1}} + \frac{2 \cos x}{2\sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}} \times$$

$$\times \frac{\cos x \left(\sqrt{2 \operatorname{sen} x+1} + \sqrt{2 \operatorname{sen} x-1}\right)}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 x-1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 x-1}}.$$

757. $y = \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2} \cdot \ln \left(x + \sqrt{x^2+k}\right)$.

Resolución.

$$y' = \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}} + \frac{\sqrt{x^2+k}}{2} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} =$$

$$= \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} = \sqrt{x^2+k}.$$

758. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{2x^2}{1+x^4}, \quad |x| < 1$.

Resolución.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\frac{(1+x^4)\cdot 4x-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x(1-x^4)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.$$

759. $y=\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3}$.

Resolución. $y'=\frac{1}{1+(\ln^2 x)/9}\cdot\frac{1}{3x}=\frac{3}{x(9+\ln^2 x)}$.

760. $y=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Resolución. Escribiendo la función dada en la forma de

$$y=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}),$$

obtenemos

$$y'=e^x\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^x\operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\times$$

$$\times e^{2x}\cdot 2=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x.$$

761. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Resolución. Transformamos la función dada:

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\ln(1+\operatorname{sen} x)-\ln\cos x.$$

Entonces

$$y'=\frac{\cos^2 x\cos x-\operatorname{sen} x\cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x}+$$

$$+\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cos x-\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x),$$

o bien

$$y'=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\cos^3 x}=2\sec^3 x.$$

762. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Resolución. $y' = \operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\sec^2\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\,(-\operatorname{sen}\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\,(\sec^2\sqrt{x}-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x}.$

763. $y = 5\operatorname{sh}^3\frac{x}{15}\ 3\operatorname{sh}^5\frac{x}{15}$.

Resolución. Hallamos

$$y' = 15\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15} + 15\operatorname{sh}^4\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15} =$$
$$= \operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\right),$$

de donde, utilizando la relación $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, obtenemos finalmente $y' = \operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\operatorname{ch}^3\frac{x}{15}$.

764. $y = x^{x^2}$.

Resolución. Aquí la base y el exponente dependen de x. Aplicando logaritmos, obtenemos

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Derivamos ambos miembros de la última igualdad con respecto a x. Como y es función de x, $\ln y$ es una función compuesta de x y $(\ln y)' = \frac{1}{y}\cdot y'$. Por consiguiente,

$$\frac{y'}{y} = x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x\cdot\ln x, \qquad \frac{y'}{y} = x\,(1+2\ln x),$$

o sea,

$$y' = xy\,(1+2\ln x) = x x^{x^2}(1+2\ln x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

765. $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Resolución. Tenemos $\ln y = \operatorname{tg} x\cdot\ln\operatorname{sen} x$, de donde

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x = 1 + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x;$$
$$y' = y\,(1+\sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x).$$

766. $y = \frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

Resolución. Aquí es también útil aplicar previamente logaritmos a la función dada.

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x);$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2} - 2\cdot\frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)};$$
$$y' = \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right].$$

Hallar las derivadas de las funciones:

767. $y=\frac{7}{x^3}$. **768.** $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

769. $y=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$.

770. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

771. $y=3x^3\ln x-x^3$.

772. $y=\frac{2^{3x}}{3^{2x}}$.

773. $y=x^2\operatorname{sen}x+2x\cos x-2\operatorname{sen}x$.

774. $y=\ln(2x^3+3x^2)$.

775. $y=\sqrt{1-3x^2}$.

776. $y=x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

777. $y=\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

778. $y=\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

779. $y=\cos^3(x/3)$. **780.** $y=\ln\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$.

781. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$.

782. $y=\operatorname{tg}2x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x$.

783. $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7\sqrt{x}$.

784. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$.

785. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$.

786. $y=\ln\frac{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}-2\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

787. $y=-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-2\ln\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

788. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$.

789. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

790. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

791. $y=\operatorname{arcsen}\frac{2x^3}{1+x^6}$, si $|x|<1$.

792. $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$.

793. $y=e^{-x}-\operatorname{sen} e^{-x}\cos e^{-x}$.

794. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

795. $y=\ln\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}$.

796. $y=1-e^{\operatorname{sen}^2 3x}\cos^2 3x$.

797. $y=\ln\frac{2\ln^2\operatorname{sen} x+3}{2\ln^2\operatorname{sen} x-3}$.

798. $y=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)$.

799. $y=-\ln(\operatorname{cosec} x+\operatorname{ctg} x)$.

800. $y=e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$. **801.** $y=\ln\frac{x^5}{x^5+2}$.

802. $y=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)^2$.

803. $y=\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

804. $y=-\operatorname{cosec}^2(x/2)$.

805. $y=\operatorname{sen}(\ln x)\cdot\cos(\ln x)-\ln(1/x)$.

806. $y=(x^5+3)[\ln(x^5+3)-1]$.

807. $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-0{,}2x^2}$.

808. $y=0{,}5\,[(x+\alpha)\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}+$
$+(\beta-\alpha^2)\ln(x+\alpha+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta})]$.

809. $y=\operatorname{arcsen} e^x+\operatorname{arcsen}\sqrt{1-e^{2x}}$.

810. $y=m\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}+(n-m\alpha)\ln(x+\alpha+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta})$.

811. $y=\frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$.

812. $y=x^2+2x\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x$.

813. $y=\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x+\ln(\operatorname{ctg} x+\operatorname{cosec} x)$.

814. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\ln\operatorname{sen} x}$.

815. $y=3x\operatorname{sen}^3 x+3\cos x-\cos^3 x$.

816. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

817. $y=e^x-\operatorname{sen} e^x\cos^3 e^x-\operatorname{sen}^3 e^x\cos e^x$.

818. $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$.

819. $y=x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)$.

820. $y = \ln \operatorname{sen} \sqrt{x}\, tg \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

821. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^x - x^{-x}}{2}$.

822. $y = \frac{1}{64}\left(\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\right) +$
$+ \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

823. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$.

824. $y = -\frac{2 \cos (x/2)}{\operatorname{sen} (x/2) + 3 \cos (x/2)}$.

825. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \operatorname{sen} x + \ln \cos \operatorname{sen} x$.

826. $y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$.

827. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$.

828. $y = 2x \operatorname{tg} 2x + \ln \cos 2x - 2x^2$.

829. $y = \arccos (2e^{2x} - 1)$. **830.** $y = \ln \ln x (\ln \ln \ln x - 1)$.

831. $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$. **832.** $y = \ln \frac{x \ln x - 1}{x \ln x + 1}$.

833. $y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

834. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \operatorname{sen} x}}{4}$.

835. $y = \frac{a}{2} \operatorname{sen}^2 x + \frac{b}{2} \cos^2 x - \frac{a + b}{4} \cos 2x$.

836. $y = \operatorname{tg}^3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} \operatorname{tg} x$.

837. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

838. $y = \frac{\ln x}{x^5} + \frac{1}{5x^5}$.

839. $y = \sqrt{2x + 1}\, [\ln (2x + 1) - 2]$.

840. $y = \sec x\, (1 + \ln \cos x)$.

841. $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \operatorname{arcsen} e^x$.

842. $y = 2^{\cos^3 x - 3 \cos x}$.

843. $y = \frac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$.

844. $y = \frac{x + 1}{x} - e^{-\ln \frac{x}{x+1}}$

845. $y = x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

846. $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

847. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\operatorname{sen} x}$.

848. $y = 2(\operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x})$.

849. $y = \frac{1}{4a} \ln \frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

850. $y = \ln \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}$.

851. $y = e^{0,5 \operatorname{tg}^2 x} \cos x$.

852. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$. 853. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$.

854. $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$. 855. $y = \log_{x^2} 2$.

856. $y = -m\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta} + (m\alpha + n) \operatorname{arcsen} \frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}$.

857. $y = \log_2 \operatorname{sen}^2 x$.

858. $y = \log_a (x + \sqrt{x^2+9})$.

859. $y = x^{\operatorname{arcsen} x}$. 860. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$.

861. $y = \frac{2^x (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}$.

862. $y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

863. $y = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2+n^2} [(m+1)\cos(n \ln x) + n \operatorname{sen}(n \ln x)]$.

864. $y = (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) \cdot \operatorname{tg}(x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) + \ln \cos (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x)$.

865. $y = (x \cos x - \operatorname{sen} x)[\ln(x \cos x - \operatorname{sen} x) - 1]$.

866. $y = 3 \operatorname{sen}(xe^x - e^x) - \operatorname{sen}^3(xe^x - e^x)$.

867. $y = \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$.

868. $y = |x| \ (x \neq 0)$. 869. $y = |f(x)|$.

870. $y = |3x - 5|$. 871. $y = e^{|x|}$.

872. $y = |x| + |x - 2|$.

873. $y = xe^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + e^x \cos x$.

874. $y = \ln [x \operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 1}]$.

875. $y = \frac{x^x}{e^x}(x \ln x - x - 1)$.

876. $y = \log_{\cos x} \operatorname{sen} x$.

877. $y=\log_{e^2}(x^n+\sqrt{x^{2n}+1})$.

878. $y = \log_x e$. 879. $y = \log_{x^2} x$.

880. $y = \log_{x^2} x^x$. 881. $y = x^{1/\ln x}$.

882. $y = x^x$. 883. $y = x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$.

884. $y=x^{\ln x}$. 885. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$.

886. Mostrar que $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$.

887. Mostrar que $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$.

888. Mostrar que $(u^v)' = vu^{v-1}\cdot u' + u^v\cdot v' \ln u$.

889. Deducir las fórmulas de derivación de arcsec x y arccosec x.

890. ¿A qué es igual la expresión $u = y^2 + y'^2 + 4y^2/y'^2$ si $y = 2\cos x$?

891. Mostrar que la función $y=(x^2+1)(e^x+C)$ convierte en identidad la ecuación $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=e^x(x^2+1)$.

2. Derivación de las funciones implícitas. Sea que la ecuación $F(x, y)=0$ determina y como función implícita de x. En adelante consideraremos esta función derivable.

Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$, obtendremos una ecuación de primer grado con respecto a y'. A partir de esta ecuación se encuentra fácilmente y', o sea, la derivada de la función implícita.

892. Hallar la derivada y'_x a partir de la ecuación $x^2+y^2=4$.

Resolución. Como y es función de x, consideraremos y^2 como función compleja de x. Por consiguiente, $(y^2)' = 2yy'$. Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación dada, obtendremos $2x + 2yy' = 0$, o sea, $y' = -x/y$.

893. Hallar la derivada y'_x a partir de la ecuación $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

Resolución. Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^yy'-2xe^y=0, \qquad \text{o sea,} \qquad y'=\frac{(2xye^y-3x^2)\,y}{1-x^2ye^y}.$$

Hallar la derivada y'_x de las funciones implícitas:

894. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

895. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

896. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$.

897. $x^y - y^x = 0$.

898. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 0$.

899. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$.

900. $\operatorname{sen}(y-x^2)-\ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

901. $\dfrac{y}{x}+e^{y/x}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

902. $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$.

903. $x^2 \operatorname{sen} y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

3. Derivación de funciones paramétricamente dadas. Si la función y con argumento x está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, entonces

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{o bien,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

904. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$

Resolución. Hallamos $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3$, $\frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Por consiguiente $\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$.

905. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$.

906. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = e^{-t} \operatorname{sen} t$, $y = e^{t} \cos t$.

907. Hallar $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ si $\rho = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha} + 1\right)\alpha$, $\theta = \sqrt{\alpha}\, e^{\sqrt{\alpha}}$.

908. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

4. Aplicaciones de la derivada a los problemas de la geometría y la mecánica. Si una curva está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo formado por el semieje positivo Ox y la tangente trazada a la curva en el punto con abscisa x_0.

La *ecuación de la tangente* a la curva $y = f(x)$ en el punto $M_0(x_0; y_0)$ tiene la forma

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0),$$

donde y'_0 es el valor de la derivada y' en el punto $M_0(x_0; y_0)$.

Se llama *normal* a la curva, la recta perpendicular a la tangente que pasa por el punto de tangencia.

La *ecuación de una normal* tiene la forma

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0).$$

Se denomina *ángulo entre dos curvas* $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en el punto de intersección $M_0(x_0; y_0)$, al ángulo comprendido entre las tangentes a estas curvas en el punto M_0. Este ángulo se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}.$$

Si para el movimiento rectilíneo de un punto se asigna la ley de movimiento $s = s(t)$, entonces la velocidad de movimiento en el instante t_0 es la derivada del recorrido respecto al tiempo: $v = s'(t_0)$.

909. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la curva $y = (2/3)\, x^5 - (1/9)\, x^3$, trazada en el punto con la abscisa $x = 1$?

Resolución. Hallamos la derivada $y' = (10/3)\, x^4 - (1/3)\, x^2$; para $x = 1$ tenemos $y' = 3$, o sea, $\operatorname{tg} \alpha = 3$, de donde $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$.

910. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 5$, trazada en el punto $M(2, 3)$? Escribir las ecuaciones de la tangente.

911. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ en el punto $M(1; -1)$.

Resolución. De la ecuación de la curva determinamos la derivada:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ o sea, } y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Por consiguiente, $y'_0 = -\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\,(-1)+6\,(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

La ecuación de la tangente es

$$y+1 = \frac{1}{4}(x-1), \text{ o bien, } x-4y-5=0.$$

La ecuación de la normal es

$$y+1 = -4(x-1), \quad \text{o bien,} \quad 4x+y-3=0.$$

912. Hallar el ángulo comprendido entre las parábolas $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$.

Resolución. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las parábolas, encontramos los puntos de su intersección $A(2; 4)$ y $B(-2; 4)$. Derivamos las ecuaciones de las parábolas: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Determinamos las pendientes de las tangentes a las parábolas en el punto A (o sea, hallamos los valores de las derivadas para $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Por lo tanto, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \dfrac{4+4}{1-16} = -\dfrac{8}{15}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-8/15)$. Del mismo modo se determina el ángulo comprendido entre las curvas en el punto B; $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(8/15)$.

913. Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto $M(x_0; y_0)$.

914. Escribir la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2/9 - y^2/8 = 1$, trazada en el punto $M(-9; -8)$.

915. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la astroide $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen}^3 t$, trazadas en el punto para el cual $t = \pi/4$.

916. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, trazadas en el punto para el cual $t = \pi/2$.

917. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la parábola semicúbica $x = t^2$, $y = t^3$, trazadas en el punto para el cual $t = 2$.

918. Mostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto $M(x_0; y_0)$ tiene la forma $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$.

919. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la curva $y = \operatorname{sh} x$, trazada en el punto $(0; 0)$?

920. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la catenaria $y = \operatorname{ch}(x/2)$, en el punto donde $x = 2 \ln 2$.

921. Escribir la ecuación de la tangente a la hipérbola equilátera $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, en el punto $t = t_0$.

922. Hallar el ángulo comprendido entre la curva $y = x - x^3$ y la recta $y = 5x$.

923. Hallar el ángulo entre las curvas $y = x^3$ e $y = 1/x^2$.

924. Hallar el ángulo entre las líneas $y = 1 + \operatorname{sen} x$, $y = 1$.

925. Hallar el ángulo entre las curvas $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$.

926. Hallar el ángulo entre las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$, $y = \sqrt{2} \cos x$.

927. Para el movimiento rectilíneo de un punto, el espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = t^5/5 + (2/\pi) \operatorname{sen} (\pi t/8)$ (t, en segundos y s, en metros). Determinar la velocidad de movimiento cuando han transcurrido dos segundos.

Resolución. Determinamos la derivada del espacio recorrido en el tiempo:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi t}{8}.$$

Para $t = 2$ tenemos $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8} \sqrt{2} \approx 16,18$. Por consiguiente, $v \approx 16,18$ m/s

928. Por la parábola $y = x (8 - x)$ se desplaza un punto de modo que su abscisa varíe en función del tiempo t por la ley $x = t\sqrt{t}$ (t, en segundos; x, en metros). ¿Cuál es la velocidad de variación de la ordenada en el punto M (1; 7)?

Resolución. Determinamos la ley de variación de la ordenada; sustituyendo en la ecuación de la parábola x por $t\sqrt{t}$, obtendremos $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. La velocidad de variación de la ordenada es la derivada de la ordenada con respecto al tiempo: $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Para el punto M (1; 7) el valor de t es igual a 1. Por lo tanto, $y'_{t=1} = 9$, o sea, la velocidad de variación de la ordenada es igual a 9 m/s.

929. El espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = t \ln (t + 1)$ (t, en segundos y s, en metros). Hallar la velocidad de movimiento cuando han transcurrido dos segundos.

929a. Por la parábola cúbica $y = x^3$ se mueve un punto de modo que su ordenada varíe en función del tiempo t por la ley $y = at^3$. ¿Cuál es la velocidad de variación de la abscisa en función del tiempo?

5. Determinación del ángulo formado entre un radio vector y una línea. Consideremos una línea plana $y = f(x)$ en las coordenadas cartesianas. Como dirección de la línea en un punto $M(x, y)$ dado, se adopta la dirección de la tangente a la línea en este punto, y ella se determina por medio del ángulo α entre la tangente y la dirección positiva del eje Ox (calculado en sentido contrario a la marcha de las agujas del reloj), además, $\operatorname{tg} \alpha = y'$. El coeficiente angular del radio vector del punto M será $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Entonces el ángulo formado por el radio vector y la tangente a la línea en el punto dado será

$$\omega=\alpha-\varphi,\ \operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}=\frac{y'-y/x}{1+y'\cdot y/x}=\frac{xy'-y}{x+yy'},$$

$$\text{o bien,}\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{x\,dy-y\,dx}{x\,dx+y\,dy} \qquad (*)$$

Si la línea se da en coordenadas polares $r=r(\varphi)$, entonces la igualdad $(*)$ se puede representar de otra forma, utilizando la relación $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$. Hallamos $xdy-ydx=r^2\,d\varphi$, y $xdx+ydy=rdr$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{r^2\,d\varphi}{r\,dr}=\frac{r}{\dot{r}}$.

930. 1) Hallar el ángulo entre la parábola $y=4-x^2$ y el *radio vector del punto $M(1,3)$ de esta línea.*

Resolución. Aprovechamos la fórmula $\operatorname{tg}\omega=\frac{xy'-y}{x+yy'}=\frac{x(-2x)-y}{x+y(-2x)}=\frac{-2x^2-y}{x-2xy}$. Reemplazando con las coordenadas del punto dado, obtenemos, $\operatorname{tg}\omega=\frac{-2-3}{1-6}=1$, $\omega=\frac{\pi}{4}$. De este modo, el ángulo formado por la parábola y el radio vector en el punto M es igual a $\frac{\pi}{4}$.

2) Hallar el ángulo entre la circunferencia $r=a$ y el radio *vector de cualquiera de sus puntos.*

Resolución. $\dot{r}=0$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{\dot{r}}=\frac{a}{0}=\infty$, $\omega=\frac{\pi}{2}$.

3) Hallar el ángulo entre la hipérbola equilátera $x^2-y^2=36$ y el *radio vector, en el punto $M(10,8)$ de la hipérbola.*

Resolución. Hallamos y' de la función implícita $x^2-y^2=36$: $2x-2y\cdot y'=0$, $y'=\frac{x}{y}$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{x\cdot x/y-y}{x+y\cdot x/y}=\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{18}{xy}$; en el punto M dado, $\operatorname{tg}\omega=\frac{18}{10\cdot 8}=\frac{9}{40}=0{,}225$ $\quad\omega=\operatorname{arctg}0{,}225$.

4) Hallar el ángulo formado por la cardioide $r=a(1-\cos\varphi)$ y el radio vector en el punto $M\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Resolución. $\dot{r}=a\operatorname{sen}\varphi$, $\quad\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{\dot{r}}=\frac{a(1-\cos\varphi)}{a\operatorname{sen}\varphi}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. En el punto M: $\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\omega=\frac{\pi}{3}$.

5) Hallar el ángulo formado por la parábola $y^2=8x$ y el radio vector en el punto $M(2,4)$.

6) Hallar el ángulo entre la espiral de Arquímedes $r=a\varphi$ y el radio vector de cualquier punto de la espiral.

7) Hallar el ángulo entre la circunferencia $r=\cos\varphi$ y el radio vector, en cualquiera de sus puntos.

8) Hallar el ángulo entre la circunferencia $(x-7)^2+(y-5)^2=$ $=2$ y el radio vector del punto $M(6, 6)$.

9) Hallar el ángulo formado por la hipérbola $xy=6$ y el radio vector del punto $M(2, 3)$.

10) Hallar el ángulo entre la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$ y el radio vector del punto $M\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

11) Hallar el ángulo entre la espiral $r=ae^{m\varphi}$ y el radio vector de cualquier punto de la espiral.

12. Hallar el ángulo entre la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ y el radio vector en el punto $M(6, 4, 8)$.

6. Derivadas de órdenes superiores. Se llama *derivada de segundo orden* (*segunda derivada*) de la función $y=f(x)$ a la derivada de su derivada. La segunda derivada se designa así: y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, o bien $f''(x)$.

Si $s=f(t)$ es la ley del movimiento rectilíneo de un punto, la segunda derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo $\frac{d^2s}{dt^2}$ es la aceleración de este movimiento.

Análogamente, la *derivada de tercer orden* de la función $y=f(x)$ es la derivada de la derivada de segundo orden $y'''=(y'')'$.

En general, se denomina *derivada de n-ésimo orden de la función* $y=f(x)$ a la derivada de la derivada de orden $n-1$: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. La n-ésima derivada se designa por $y^{(n)}$, por $\frac{d^ny}{dx^n}$, o bien por $f^{(n)}(x)$.

Las derivadas de orden superior (segunda, tercera, etc.) se calculan por la derivación sucesiva de la función dada.

Si una función está definida por ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

las derivadas y'_x, y''_{xx}, ..., se calculan por las fórmulas

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ etc.}$$

La segunda derivada se puede calcular también por la fórmula

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

931. $y=x^5+2x^4-3x^3-x^2-\frac{1}{2}x+7$. Hallar y', y'', y''',...

Resolución. Tenemos

$$\begin{aligned}
y' &= 5x^4+8x^3-9x^2-2x-\frac{1}{2},\\
y'' &= 20x^3+24x^2-18x-2,\\
y''' &= 60x^2+48x-18,\\
y^{\mathrm{IV}} &= 120x+48,\\
y^{\mathrm{V}} &= 120,\\
y^{\mathrm{VI}} &= y^{\mathrm{VII}}=\ldots=0.
\end{aligned}$$

932. $y = \ln x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos:

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$y'' = -1 \cdot x^{-2},$$
$$y''' = 1 \cdot 2x^{-3},$$
$$y^{IV} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

933. $y = 2^x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos $y' = 2^x \cdot \ln 2$, $y'' = 2^x \cdot \ln^2 2$, $y''' = 2^x \cdot \ln^3 2$, ..., $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.

934. $y = \operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

935. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ si $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

Resolución. Tenemos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(a \operatorname{sen}^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \operatorname{sen}^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t} = \frac{1}{3a \operatorname{sen} t \cos^4 t}.$$

Hallar las derivadas de segundo orden:

936. $y = -\frac{22}{x+5}$. **937.** $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$.

938. $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arc\,sen} x$.

939. $y = -\frac{1}{9}x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$.

940. $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2}$.

941. $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ **942.** $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

943. Mostrar que la función $y = \operatorname{sen} \ln x + \cos \ln x$ satisface la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$.

944. Mostrar que la función $y = x + \operatorname{sen} 2x$ satisface la ecuación $y'' + 4y = 4x$.

945. Para el movimiento rectilíneo de un punto el espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = \sqrt{t}$. Hallar la aceleración del punto al final del cuarto segundo.

Hallar las terceras derivadas:

946. $y = \frac{x}{6(x+1)}$. **947.** $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

948. $y = (2x+3)^3 \sqrt{2x+3}$. **949.** $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Indicación: $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Hallar las derivados de n-ésimo orden:

950. $y = x^n \sqrt{x}$. **951.** $y \frac{1}{2x+1}$.

952. $y = 5 - 3\cos^2 x$. **953.** $y = 2^x + 2^{-x}$.

954. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. **955.** $y = e^{kx}$.

956. $y = \cos x$. **957.** $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 1/t. \end{cases}$

958. $\begin{cases} x = at + b, \\ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{cases}$

959. Mostrar que la función $y = e^x + 2e^{2x}$ satisface la ecuación $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

960. Mostrar que la función $y = x^3$ satisface la ecuación $y^{V} + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

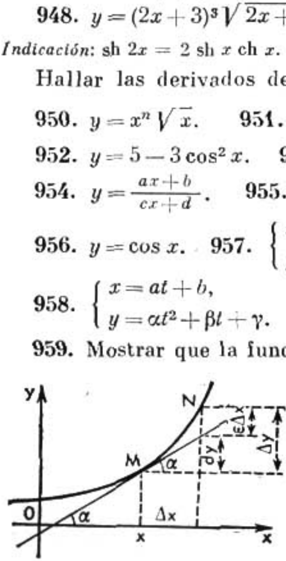


Fig. 28

6. Diferenciales de primer orden y de órdenes superiores. Se llama *diferencial (de primer orden)* de la función $y = f(x)$ a la parte principal de su incremento, que es lineal con respecto al incremento del argumento. Se denomina diferencial del argumento al incremento del argumento: $dx = \Delta x$.

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial del argumento:

$$dy = y' dx.$$

La diferencial equivale geométricamente al incremento de la ordenada de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $M(x; y)$ (fig. 28).

Propiedades principales de la diferencial

1ª. $dC = 0$, donde $C = \text{const.}$
2ª. $d(Cu) = C\,du$.
3ª. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4ª. $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

5ª. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\ (v\neq 0)$.

6ª. $df(u)=f'(u)\,du$.

Si el valor absoluto del incremento Δx del argumento es pequeño, entonces

$$\Delta y\approx dy$$

y

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x.$$

De este modo la diferencial de una función puede emplearse para cálculos aproximados.

Se denomina *diferencial de segundo orden* de la función $y=f(x)$ a la diferencial de la diferencial de primer orden: $d^2y=d(dy)$.

Análogamente se define la diferencial de tercer orden: $d^3y=d(d^2y)$.

En general, $d^ny=d(d^{n-1}y)$.

Si $y=f(x)$ y x es una variable independiente, entonces las diferenciales de órdenes superiores se calculan por las fórmulas:

$$d^2y=y''(dx)^2,\ d^3y=y'''(dx)^3,\ \ldots,\ d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

961. Hallar la diferencial de la función $y=\operatorname{arctg} x$.

Resolución. $dy=(\operatorname{arctg} x)'\cdot dx=\frac{dx}{1+x^2}$.

962. Hallar la diferencial de la función $s=e^{t^3}$.

Resolución. $ds=e^{t^3}\cdot 3t^2\,dt$.

963. Hallar las diferenciales de primer, segundo y tercer orden de la función $y=(2x-3)^3$.

Resolución. Tenemos

$$dy=3(2x-3)^2\cdot 2dx=6(2x-3)^2\,dx,$$
$$d^2y=12(2x-3)\cdot 2dx^2=24(2x-3)\,dx^2,$$
$$d^3y=24\cdot 2dx^3=48dx^3.$$

964. Hallar las diferenciales de primer y segundo orden de la función $v=e^{2t}$.

Resolución. $dv=2e^{2t}\,dt$, $d^2v=4e^{2t}\cdot dt^2$.

965. Comparar el incremento y la diferencial de la función $y=2x^3+5x^2$.

Resolución. Hallamos

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-2x^3-5x^2=$$
$$=(6x^2+10x)\,\Delta x+(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3,$$
$$dy=(6x^2+10x)\,dx.$$

La diferencia entre el incremento Δy y la diferencial dy es un infinitésimo de orden superior a Δx e igual a $(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3$.

966. Calcular el valor aproximado de arcsen 0,51.

Resolución. Examinamos la función $y=\operatorname{arcsen} x$. Haciendo $x=0{,}5$, $\Delta x=0{,}01$ y aplicando la fórmula $\operatorname{arcsen}(x+\Delta x)\approx\operatorname{arcsen} x+(\operatorname{arcsen} x)'\cdot\Delta x$ obtenemos

$$\operatorname{arcsen} 0{,}51\approx\operatorname{arcsen} 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+0{,}011=0{,}513.$$

967. Calcular el valor aproximado del área de un círculo cuyo radio sea igual a 3,02 m.

Resolución. Utilicemos la fórmula $S = \pi R^2$. Haciendo $R = 3$, $\Delta R = 0{,}02$, tenemos

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Por consiguiente, el valor aproximado del área del círculo es de $9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66$ (m²).

Hallar las diferenciales de las funciones:

968. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{7}$.

969. $x = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$.

970. $y = 2 \ln \operatorname{ch}(x/2)$.

971. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$.

972. $y = x(\ln x - 1)$. Hallar dy, d^2y, d^3y.

973. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$. Hallar d^2y.

974. Comparar el incremento y la diferencial de la función $y = 1/x$.

975. Calcular Δy y dy para la función $y = x^2 - 2x$ si $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}01$.

976. Hallar el valor aproximado de $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

977. Hallar el valor aproximado del volumen de una esfera de 2,01 m de radío.

978. Hallar el valor aproximado de $\operatorname{tg} 46°$.

979. Hallar el valor aproximado de $\ln \operatorname{tg} 47°15'$.

980. Hallar el valor aproximado de x a partir de la ecuación $13 \operatorname{sen} x - 15 \cos x = 0$.

981. Hallar el valor aproximado de $\sqrt[4]{15{,}8}$.

§ 2. Investigación de funciones

1. Teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy y fórmula de Taylor.

Teorema de Rolle. Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ derivable en el intervalo $]a, b[$ y $f(a) = f(b)$, entonces en el intervalo $]a, b[$ hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual $f'(\xi) = 0$.

Si, en particular, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, el teorema de Rolle significa que entre dos raíces de la función hay al menos una raíz de su derivada.

Teorema de Lagrange (sobre el incremento finito). Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en el intervalo $]a, b[$, entonces en este intervalo hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual se cumple la igualdad

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Estos teoremas tienen la interpretación geométrica siguiente: sobre el arco AB de la curva continua $y = f(x)$ que tiene en cada punto interior cierta tangente (no paralela al eje Oy) hay al menos un punto interior en el cual la tangente es paralela a la cuerda AB. (Para el teorema de Rolle tanto la cuerda AB como la tangente son paralelas al eje Ox.)

Teorema de Cauchy. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$ y derivables en el intervalo $]a, b[$, siendo $\varphi'(x) \neq 0$, entonces en *este intervalo hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

donde $a < \xi < b$.

Fórmula de Taylor. *La función $f(x)$ derivable $n+1$ veces en cierto intervalo que contiene el punto a puede representarse en forma de la suma de un polinomio de n-ésimo grado y del término residual R_n:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $a \gtrless \xi \gtrless x$, o bien, $\xi = a + \theta(x-a)$, siendo $0 < \theta < 1$. Cuando $a = 0$, se obtiene la *fórmula de Maclaurin*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Citamos los desarrollos de algunas funciones por la fórmula de Maclaurin:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n;$$

$$R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^{2m-1}(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}+R_{2m};$$

$$R_{2m}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2m}(-1)^m}{(2m)!}+R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1}=(-1)^{m+1}\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+R_n;$$

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

(siempre $0 < \theta < 1$).

982. ¿Se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 6x + 100$, si $a = 1$, $b = 5$? ¿Con qué valor de ξ?

Resolución. Como la función $f(x)$ es continua y derivable para todos los valores de x y sus valores en los extremos del segmento $[1, 5]$ son iguales: $f(1) = f(5) = 95$, el teorema de Rolle se cumple sobre este segmento. Determinamos el valor de ξ a partir de la ecuación $f'(x) = 2x - 6 = 0$, o sea, $\xi = 3$.

983. ¿Se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ si $a = 0$, $b = 8$? ¿Con qué valor de ξ?

Resolución. La función $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ es continua para todos los valores de x y tiene la derivada $f'(x) = (8 - 2x)/(3\sqrt[3]{(8x - x^2)^2})$ cuando $x \neq 0$, $x \neq 8$, o sea, es derivable en el intervalo $]0, 8[$. Además, $f(0) = f(8) = 0$. De este modo, el teorema de Rolle se cumple sobre el segmento $[0, 8]$; en efecto, $f'(x) = 0$ para $x = \xi = 4$.

984. Se da la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$. Sean $a = 0$, $b = 16$. Entonces $f(0) = f(16) = 4$. Sin embargo, la derivada $f'(x) = 2/(3\sqrt[3]{x-8})$ no se anula en ningún punto del intervalo$]0, 16[$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

Resolución. No, no lo contradice, ya que en el punto $x = 8$ del intervalo $]0, 16[$ la derivada no existe y las condiciones del teorema del Rolle no se observan.

985. Mostrar que la derivada del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ tiene una raíz real en el intervalo $]-1, 1[$.

Resolución. Determinemos las raíces del polinomio dado: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, o bien $(x - 1)^2 (x + 1) = 0$, o sea $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Puesto que $f(-1) = f(1) = 0$, entonces, según el teorema de Rolle $f'(x)$ tiene una raíz en el intervalo $]-1, 1[$. Determinamos las raíces de la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, o sea, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1$. De este modo, entre las raíces de la función -1 y 1 hay una raíz de la derivada, igual a $-1/3$.

986. Sobre el arco AB de la curva $y = 2x - x^2$ hallar un punto M en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB si $A(1; 1;)$ y $B(3; -3)$.

Resolución. La función $y = 2x - x^2$ es continua y derivable para todos los valores de x. Según el teorema de Lagrange entre dos valores $a = 1$ y $b = 3$ existe un valor de $x = \xi$ que satisface la igualdad $y(b) - y(a) = (b - a)\, y'(\xi)$, donde $y' = 2 - 2x$. Sustituyendo los valores respectivos, obtendremos

$$y(3) - y(1) = (3 - 1)\, y'(\xi);\ (2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3 - 1) \cdot (2 - 2\xi);\ -4 = 4(1 - \xi).$$

De aquí $\xi = 2$, $y(2) = 0$. De este modo, el punto M tiene las coordenadas $(2; 0)$.

987. Sobre el arco AB de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$ hallar un punto M en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB, si a los puntos A y B corresponden los valores de $t = 1$ y $t = 3$.

Resolución. La pendiente de la cuerda AB es igual a $\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)}$ y la pendiente de la tangente en el punto M (cuando $t = \xi$) es igual a $\frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$, donde $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$.

Para determinar ξ por el teorema de Cauchy obtenemos la ecuación

$$\frac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)} = \frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}, \quad \text{o bien} \quad \frac{27 - 1}{9 - 1} = \frac{3\xi^2}{2\xi}, \quad \text{o bien} \quad \frac{13}{4} = \frac{3}{2}\xi,$$

o sea, $\xi = 13/6$. El valor hallado de ξ satisface la desigualdad $1 < \xi < 3$.

Sustituyendo el valor de $t=\xi$ en la ecuación paramétrica de la curva, obtenemos $x=169/36$, $y=2197/216$. De suerte que el punto buscado es M (169/36; 2197/216).

988. Representar la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en forma de un polinomio de quinto grado con respecto al binomio $x-1$.

Resolución. Calculamos los valores de la función $f(x)=x^{1/3}$ y sus derivadas hasta el quinto orden inclusive, para $a=1$:

$$f(1)=1,\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3},\quad f'(1)=\frac{1}{3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3},\quad f''(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3},\quad f'''(1)=\frac{10}{27};\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{80}{81}x^{-11/3};\quad f^{\mathrm{IV}}(1)=-\frac{80}{81};$$

$$f^{\mathrm{V}}(x)=\frac{880}{243}x^{-14/3},\quad f^{\mathrm{V}}(1)=\frac{880}{243}.$$

Por consiguiente, según la fórmula de Taylor obtenemos

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+$$
$$+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-5)^5+R_5,$$

donde

$$R_5=\frac{f^{\mathrm{VI}}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-17/3}(x-1)^6,\quad 1<\xi<x.$$

989. Representar la función $f(x)=a^x$ $(a>0)$ en forma de un polinomio de tercer grado con respecto a x.

Resolución. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x)&=a^x, & f(0)&=1,\\ f'(x)&=a^x\ln a, & f'(0)&=\ln a,\\ f''(x)&=a^x\ln^2 a, & f''(0)&=\ln^2 a,\\ f'''(x)&=a^x\ln^3 a, & f'''(0)&=\ln^3 a,\\ f^{\mathrm{IV}}(x)&=a^x\ln^4 a, & f^{\mathrm{IV}}(\theta x)&=\ln^4 a\cdot a^{\theta x}. \end{aligned}$$

Por la fórmula de Maclaurin obtenemos

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\frac{x^3\ln^3 a}{3!}+R_3,$$

donde $R_3=\dfrac{x^4\ln^4 a}{4!}a^{\theta x}$, $0<\theta<1$.

990. Calcular con una exactitud de hasta 10^{-3} el valor aproximado de $\sqrt[3]{29}$.

Resolución. Representamos la raíz dada así: $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\times$ $\times\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$.

Utilizamos el desarrollo binomial

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n+R_n.$$

De aquí obtenemos la igualdad aproximada

$$(1+x)^m \cong 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

cuyo error

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera cuando $|x|<1$ y n lo suficientemente grande.

Suponiendo $x=2/27$ y $m=1/3$, obtendremos

$$\sqrt[3]{29}\cong 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n\right).$$

Evaluando los valores de los errores sucesivos de cálculo de $3|R_n|$, encontramos

$$3|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\quad 3|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Por lo tanto, para calcular con la exactitud prefijada es suficiente tomar los tres términos que preceden al resto R_2, o sea, $\sqrt[3]{29}\cong 3(1+0{,}024-0{,}0006)=$ $=3{,}072$.

991. Calcular $\sqrt{e}$ con una exactitud de hasta 0,0001.

Resolución. Utilizamos la fórmula de Maclaurin para la función e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

donde $R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}n^{n+1}$, $0<\theta<1$. Haciendo $x=1/2$, obtenemos

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1}{2n^n\cdot n!}+R_n,$$

donde $R_n=\frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0<\theta<1$.

Como $0<\theta<1$, $2<e<3$, entonces $R_n<\frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Pero $e^{1/2}<2$. Por eso $R_n<\frac{1}{2^n(n+1)!}$. Se necesita determinar n de modo que se cumpla la desigualdad $R_n<0{,}0001$.

Si $n=3$, entonces $R_3<\frac{1}{8\cdot 24}$; $R_3<\frac{1}{192}$,

si $n=4$, entonces $R_4<\frac{1}{16\cdot 120}$; $R_4<\frac{1}{1920}$,

si $n=5$, entonces $R_5<\frac{1}{32\cdot 720}$; $R_5<0{,}0001$.

Para determinar $\sqrt{e}$ con una exactitud de hasta 0,0001 obtenemos la igualdad aproximada

$$\sqrt{e}\cong 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1!}{2^5\cdot 5!}.$$

Efectuamos la adición, convirtiendo todos los sumandos en fracciones decimales con un número sobrante (de reserva):

$$\begin{array}{r} 1{,}50000 \\ 0{,}12500 \\ 0{,}02083 \\ 0{,}00260 \\ \underline{0{,}00026} \\ 1{,}64869. \end{array}$$

De suerte que $\sqrt{e} \cong 1{,}6487$.

992. Se da la función $f(x)$ que es continua junto con sus derivadas hasta el orden de $(n-1)$ inclusive, sobre el segmento $[a, b]$ y tiene la derivada de n-ésimo orden en el intervalo $]a, b[$, con ello para esta función se cumplen las igualdades $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots f(x_{n-1}) = f(b)$, donde $a < x_1 < x_2 < \ldots < \ldots < x_{n-1} < b$. Demostrar que en el intervalo $]a, b[$ hay al menos un punto ξ para el cual $f^{(n)}(\xi) = 0$.

993. Examinar el caso particular del problema precedente, si $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $a = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $b = 4$. Determinar ξ.

994. Representar en forma de un polinomio de tercer grado con respecto a $x - x_0$ $(x_0 \neq 0)$ la función $1/x$.

995. ¿En qué punto del arco AB de la curva $y = x^3 - 3x$, la tangente es paralela a la cuerda AB si $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 18)$?

Calcular con una exactitud de hasta 10^3:

996. $\cos 41°$. **997.** $\sqrt[3]{121}$.

998. $\sqrt[3]{e}$. **999.** $\sqrt[7]{129}$.

1000. sen $36°$.

2. La regla de L'Hospital para resolver las indeterminaciones. Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ derivables en un entorno ε del punto x_0 y $\varphi'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ ó bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, o sea, el cociente en el punto $x = x_0$ es una indeterminación de las formas $0/0$ ó ∞/∞, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

a condición de que exista el límite de la razón de las derivadas.

Si el cociente $f'(x)/\varphi'(x)$ en el punto $x=x_0$ es también una indeterminación de las formas $0/0$ ó ∞/∞ y las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ satisfacen las condiciones respectivas, hay que pasar a la razón de las derivadas segundas, etc.

En el caso de una indeterminación de forma $0\cdot\infty$ ó $\infty - \infty$ hay que transformar algebraicamente la función dada de modo que se reduzca a la indeterminación de la forma $0/0$ ó ∞/∞ y luego aplicar la regla de L'Hospital.

En el caso de una indeterminación de la forma 0^0 ó ∞^0 ó 1^∞ conviene determinar por logaritmos la función dada y hallar el límite de su logaritmo.

1001. Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Resolución. El numerador y el denominador tienden a cero cuando $x \to 1$ y por eso tenemos una indeterminación de la forma $0/0$. Utilizamos la regla de L'Hospital, o sea, examinamos el límite de la razón de las derivadas de las funciones dadas:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

1002. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 0/0. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x}=\frac{1}{6},$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Aquí la regla de L'Hospital ha sido empleada dos veces.

1003. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, si n es un número entero positivo.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma ∞/∞. Apliquemos la regla de L'Hospital n veces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=$$

$$=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x}=0.$$

1004. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

Resolución. En este caso también tiene lugar una indeterminación de la forma ∞/∞. Hallamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{(1/2)\,e^{x/2}}=0.$$

1005. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$.

Resolución. Aquí tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Representamos el producto de las funciones en forma del cociente y luego, una vez obtenida una indeterminación de forma ∞/∞, aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

1006. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Para hallar el límite de la función reducimos las fracciones a un común denominador y luego, una vez obtenida una indeterminación de forma 0/0, aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

1007. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^x$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 0^0. Designamos la función dada por y, o sea, $y=(\operatorname{sen} x)^x$ y le aplicamos logaritmos:

$$\ln y = x \ln \cdot \operatorname{sen} x = \frac{\ln \operatorname{sen} x}{1/x}.$$

Calculamos el límite del logaritmo de la función dada aplicando la regla de L'Hospital (aquí tenemos una indeterminación de la forma ∞/∞):

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{-1/x^2} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x} = -\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = 0.$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

1008. Hallar $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma ∞^0. Tomamos $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = y$, aplicando logaritmos:

$$\ln y = 2\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/\cos x}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to \pi/2} \ln y = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec^2 x/\operatorname{tg} x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} =$$

$$= 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x} = \lim_{x\to \pi/2} \cos x = 0,$$

o sea, $\lim\limits_{x\to \pi/2} y = e^0 = 1$.

1009. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 1^∞. Aplicando logaritmos y empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \ln (1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{1/\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{-1/(x \ln^2 x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{x \ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{1+1/x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(2 \ln x)/x}{-1/x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

De este modo, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Hallar los límites de las funciones siguientes:

Indeterminación de la forma 0/0.

1010. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

1011. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln (1+x)}$.

1012. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{e^{3/x}-1}$.

1013. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

1014. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{\mathrm{sen}^2\, 5x}$.

1015. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, 3x - 3xe^x + 3x^2}{\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{sen}\, x - x^3/6}$.

Indeterminación de la forma ∞/∞.

1016. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

1017. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$.

1018. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln \mathrm{sen}\, x}$.

1019. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$.

1020. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

Indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

1021. $\lim\limits_{x\to 0} (x\cdot \mathrm{ctg}\,\pi x)$. **1022.** $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{arcsen}\, x\cdot \mathrm{ctg}\, x)$.

1023. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cdot \mathrm{ctg}\, x$.

Indeterminación de forma $\infty-\infty$.

1024. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

1025. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{p}{1-x^p} - \dfrac{q}{1-x^q}\right)$.

1026. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2\, x\right)$.

Indeterminaciones de las formas 0^0, ∞^0, 1^∞.

1027. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

1028. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$.

1029. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

1030. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}\right)^{1/x^2}$.

3. Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremo de una función. Una función $f(x)$ se llama *creciente en un punto* x_0 si para un $h>0$ suficientemente pequeño se cumple la condición (fig. 29)

$$f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h).$$

Una función $f(x)$ se dice *decreciente en un punto* x_0 si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición (fig. 30)

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

Una función $f(x)$ se denomina *creciente en un intervalo* $]\,a,\ b\,[$ si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo indicado que satisfagan la desigualdad $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$.

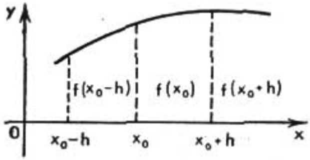


Fig. 29

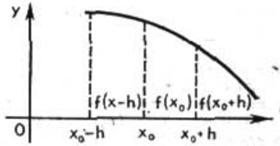


Fig. 30

Una función $f(x)$ se llama *decreciente en un intervalo* $]\,a,\ b\,[$ si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo indicado que satisfacen la desigualdad $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función

1) *Si* $f'(x_0) > 0$, *la función* $f(x)$ *es creciente en el punto* x_0.
2) *Si* $f'(x_0) < 0$, *la función* $f(x)$ *es decreciente en el punto* x_0.

El valor de $f(x_0)$ se llama *máximo* de la función $f(x)$ si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ y } f(x_0 + h) < f(x_0).$$

En este caso el punto x_0 se llama *punto de máximo* de la función $f(x)$ (fig. 31).

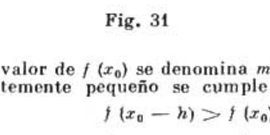


Fig. 31

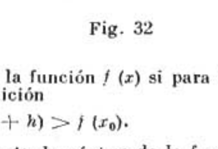


Fig. 32

El valor de $f(x_0)$ se denomina *mínimo* de la función $f(x)$ si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición

$$f(x_0 - h) > f(x_0) \text{ y } f(x_0 + h) > f(x_0).$$

En este caso el punto x_0 se denomina *punto de mínimo* de la función $f(x)$ (fig. 32).

El máximo o el mínimo de la función se llama *extremo* de la misma. El punto de máximo o de mínimo de la función se llama *punto* de su *extremo*.

CONDICIÓN NECESARIA DEL EXTREMO. *Si la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto x_0, entonces la derivada $f'(x_0)$ se anula o no existe.*

El punto x_0 en el cual $f'(x_0) = 0$ se llama *punto estacionario*. Los puntos en los cuales $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no existe, se denominan *puntos críticos*. No todo punto crítico es un punto de extremo.

Condiciones suficientes del extremo.

Regla 1. *Si x_0 es un punto crítico de una función $f(x)$ y para un $h > 0$ arbitrario suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un máximo, pero si $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un mínimo.*

Si los signos $f'(x_0 - h)$ y $f'(x_0 + h)$ son iguales, la función $f(x)$ en el punto x_0 no tiene extremo, a saber, el máximo.

Regla 2. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x) \neq 0$, la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un extremo, precisamente, un máximo, si $f''(x_0) < 0$, y un mínimo, si $f''(x_0) > 0$.*

Regla 3. *Sea $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, . . ., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. En este caso la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto x_0, si n es un número par, precisamente, un máximo cuando $f^{(n)}(x_0) < 0$ y un mínimo cuando $f^{(n)}(x_0) > 0$. Pero si n es un número impar, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 no tiene extremo.*

Para hallar el valor máximo (mínimo) de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ es necesario entre los valores de la función en las fronteras del segmento y en los puntos críticos pertenecientes a este segmento elegir el valor máximo (mínimo).

1031. Se dan los puntos $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 0{,}5$. ¿En qué puntos entre los citados la función $y = x^3 - 3x^2$ crece? En cuáles decrece?

Resolución. Determinamos la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Tenemos:
si $x = 3$, entonces $y' = 9 > 0$; la función crece;
si $x = 1$, entonces $y' = -3 < 0$; la función decrece;
si $x = -1$, entonces $y' = 9 > 0$; la función crece;
si $x = 0{,}5$, entonces $y' = -2{,}25 < 0$; la función decrece.

1032. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x(1 + \sqrt{x})$.

Resolución. Encontramos $y' = 1 + (3/2)\, x^{1/2}$. Como la derivada es positiva en el intervalo $[0, +\infty[$, la función crece en todo su campo de definición.

1033. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x - 2 \operatorname{sen} x$ si $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolución. Hallamos la derivada: $y' = 1 - 2 \cos x$. Es evidente que $y' > 0$ en el intervalo $]\pi/3, 5\pi/3[$ e $y' < 0$ en los intervalos $]0, \pi/3[$ y $]5\pi/3, 2\pi[$. Así, pues, en el intervalo $]\pi/3, 5\pi/3[$ la función dada crece y en los intervalos $]0, \pi/3[$ y $]5\pi/3, 2\pi[$ decrece.

1034. Investigar el extremo de la función $y = (x - 5)\, e^x$.

Resolución. Hallamos la derivada $y' = (x - 4)\, e^x$. La igualamos a cero y encontramos el punto estacionario:

$$e^x (x - 4) = 0,\ x = 4;\ y'(4 - h) = -he^{4-h} < 0,\ y'(4 + h) = he^{4+h} > 0.$$

Según la regla 1 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 4$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = -e^4$.

1035. Investigar los extremos de la función $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Resolución. La función está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Hallamos la derivada: $y' = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$; $y' = 0$ para $1-2x^2 = 0$; de aquí, $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ (puntos estacionarios); $y' = \infty$ para $x = \pm 1$, o sea, en las fronteras del campo de definición de la función.

Hallamos la segunda derivada: $y'' = x(2x^2-3)/(1-x^2)^{3/2}$. Calculamos los valores de la segunda derivada en los puntos estacionarios. Cuando $x = 1/\sqrt{2}$, tenemos

$$y''(1/\sqrt{2}) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\,(1-1/2)^{3/2}} < 0,$$

por consiguiente, de acuerdo con la regla 2 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 1/\sqrt{2}$ la función tiene el máximo $y_{\max} = (1/\sqrt{2})\sqrt{1/\sqrt{2}} = 1/2$. Cuando $x = -1/\sqrt{2}$, obtenemos

$$y''(-1/\sqrt{2}) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\,(1-1/2)^{3/2}} > 0,$$

o sea, en el punto $x = -1/\sqrt{2}$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = -1/2$.

En los puntos críticos $x = \pm 1$ el extremo falta, ya que por definición, sólo los puntos interiores del campo de definición de la función pueden ser puntos extremos.

1036. Investigar los extremos de la función $y = (x-1)^4$.

Resolución. Hallamos la derivada: $y' = 4(x-1)^3$; $(x-1)^3 = 0$; $x = 1$ es un punto estacionario. La segunda derivada $y'' = 12(x-1)^2$ cuando $x = 1$ es igual a cero. La tercera derivada $y''' = 24(x-1)$ cuando $x = 1$ también se anula. La cuarta derivada $y^{\mathrm{IV}} = 24 > 0$. Por lo tanto, según la regla 3 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 1$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = 0$.

1037. Investigar el extremo de la función $y = 1-(x-2)^{4/5}$.

Resolución. Hallamos $y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$. La derivada no se anula para ningún valor de x y no existe solamente cuando $x = 2$ (punto crítico).

Puesto que para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $y'(2-h) > 0$ e $y'(2+h) < 0$, entonces según la regla 1 llegamos a la conclusión de que para $x = 2$ la función tiene el máximo $y_{\max} = 1$.

1038. Investigar los extremos de la función $y = (x-2)^{2/3}(2x+1)$.

Resolución. Determinamos $y' = \frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$. Los puntos críticos $x = 1$ (la derivada es igual a cero) y $x = 2$ (la derivada no existe). Para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $y'(1-h) > 0$, $y'(1+h) < 0$; $y'(2-h) < 0$, $y'(2+h) > 0$. Por consiguiente, en el punto $x = 1$ la función tiene el máximo $y_{\max} = 3$ y en el punto $x = 2$, el mínimo $y_{\min} = 0$.

1039. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 3x - x^3$ sobre el segmento $[-2, 3]$.

Resolución. Hallamos la derivada: $f'(x) = 3-3x^2$; $3-3x^2 = 0$, o sea, $x = \pm 1$ son los puntos estacionarios. Determinamos los valores de la función en estos puntos: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Calculamos los valores de la función dada en las fronteras del intervalo: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Entre los cuatro valores obtenidos escogemos el mayor y el menor.

De suerte que el mayor valor de la función sobre el segmento dado es igual a 2 y el menor, a -18.

1040. Hallar un cilindro tal, que tenga el volumen máximo para la superficie total dada S.

Resolución. Sea el radio de la base del cilindro igual a x y su altura igual a y. Entonces

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{o sea,} \quad y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Por consiguiente, el volumen del cilindro se expresará así:

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

El problema se reduce a la investigación de la función $V(x)$ para el máximo de $x > 0$.

Hallemos la derivada $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ y la igualemos a cero, de donde $x = \sqrt{S/(6\pi)}$.

Hallemos la segunda derivada: $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$. Como para $x = \sqrt{S/(6\pi)}$ se cumple la condición $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, el volumen tiene el mayor valor, con ello

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot S/(6\pi)}{2\pi\sqrt{S/(6\pi)}} = 2\sqrt{S/(6\pi)} = 2x$$

o sea, la sección axial del cilindro debe ser un cuadrado.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

1041. $y = 2 - 3x + x^3$. **1042.** $y = (x^2 - 1)^{3/2}$.

1043. $y = xe^{-x}$ **1044.** $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Hallar los extremos de las funciones:

1045. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$. **1046.** $y = x + \sqrt{3 - x}$.

1047. $y = \ln(x^2 + 1)$. **1048.** $y = \operatorname{ch}^2 x$.

1049. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1050.** $y = xe^{-x/2}$.

1051. $y = (x - 1)^{6/7}$.

1052. $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$.

1053. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

1054. $y = x - 2\operatorname{sen}^2 x$.

1055. $y = e^{1,5\operatorname{sen} x}$.

1056. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x^4 - 2x^2 + 3$ sobre el segmento $[-3, 2]$.

1057. Sobre el eje Oy hallar un punto a partir del cual el segmento $[AB]$ sea visto bajo el ángulo máximo si $A(2; 0)$, $B(8; 0)$.

1058. El punto B se encuentra a 60 km de una vía férrea. Viajando por el ferrocarril, la distancia del lugar A al punto C próximo al punto B es igual a 285 km. ¿A qué distancia del punto C se debe construir una estación para emplear el tiempo mínimo viajando entre los lugares A y B si la velocidad de movimiento por el ferrocarril es igual a 52 km/h y la velocidad de movimiento por la carretera es de 20 km/h?

1059. Hallar los lados de un rectángulo de área máxima que pueda ser inscrito en la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

1060. Un alambre de longitud l está doblado de modo que forma un rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo si su área es máxima?

1061. Hallar el volumen máximo de un cono cuya generatriz es igual a l.

1062. Hallar el volumen máximo de un cilindro cuya superficie total es igual a S.

1067. Un turista camina desde el punto A que se encuentra junto a una carretera al lugar B a 8 km de la carretera. La distancia entre A y B es igual a 17 km. ¿En qué punto el turista debe apartarse de la carretera para llegar al punto B gastando el tiempo mínimo si la velocidad de su movimiento por la carretera es de 5 km/h y a campo traviesa es de 3 km/h?

1064. Un canal cuyo ancho es de 27 m desemboca en ángulo recto en otro canal de 64 m de ancho. ¿Cual es la longitud máxima de troncos que puedan ser transportados por este sistema de canales?

1065. ¿En qué altura por encima del centro de una mesa redonda de radio a se debe colocar la bombilla eléctrica para que la iluminación del borde de la mesa sea máxima?

Indicación: la intensidad de iluminación se expresa por la fórmula $I = (k \cdot \text{sen}\,\varphi)/r^2$, donde φ es el ángulo de inclinación de los rayos; r, distintacia del manantial de luz al área que se alumbra; k, intensidad del manantial de luz.

Fig. 33

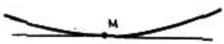


Fig. 34

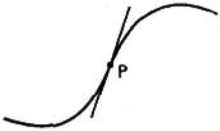


Fig. 35

4. Convexidad. Concavidad. Punto de inflexión. El gráfico de una función $y = f(x)$ se llama *convexo* en el intervalo $]a, b[$ si se encuentra debajo de la tangente trazada en todo punto de este intervalo (fig. 33).

El gráfico de una función $y = f(x)$ se dice cóncavo en el intervalo $]a, b[$ si se encuentra por encima de la tangente trazada en todo punto de este intervalo (fig. 34).

CONDICION SUFICIENTE DE LA CONVEXIDAD (CONCAVIDAD) DEL GRAFICO DE UNA FUNCION. *Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $]a, b[$, el gráfico de la función es convexo en este intervalo; pero si $f''(x) > 0$, entonces en el intervalo $]a, b[$ el gráfico de la función es cóncavo.*

El punto $(x_0; f(x_0))$ del gráfico de una función que separa la parte convexa del gráfico de la parte cóncava se denomina *punto de inflexión* (fig. 35).

Si x_0 es la abscisa del punto de inflexión de la función $y = f(x)$, entonces la segunda derivada es igual a cero o no existe. Los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no existe se llaman *puntos críticos de segunda especie*.

Si x_0 es un punto crítico de segunda especie y para un $h > 0$ arbitrario tan pequeño como se quiera se cumplen las desigualdades $f''(x_0 - h) < 0$, $f''(x_0 + h) > 0$ (o bien las desigualdades $f''(x_0 - h) > 0$, $f''(x_0 + h) < 0$), entonces el punto de la curva $y = f(x)$ con la abscisa x_0 es de inflexión.

Sin embargo, si $f''(x_0 - h)$ y $f''(x_0 + h)$ tienen los mismos signos, entonces el punto de la curva $y = f(x)$ con la abscisa x_0 no es de inflexión.

1066. Hallar los intervalos de convexidad y de concavidad del gráfico de la función $y = x^5 + 5x - 6$.

Resolución. Tenemos $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. Si $x < 0$, entonces $y'' < 0$ y la curva es convexa, pero si $x > 0$, entonces $y'' > 0$ y la curva es cóncava. De suerte que la curva es convexa en el intervalo $]-\infty, 0[$ y cóncava en el intervalo $]0, +\infty[$.

1067. Hallar los extremos de la función $y = (x + 1)^2 (x - 2)$ y los puntos de inflexión de su gráfico.

Resolución. Hallamos la derivada primera: $y' = 3(x^2 - 1)$. Las raíces de la derivada primera son $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Determinamos la derivada segunda: $y'' = 6x$. Calculamos los valores de la derivada segunda en los puntos estacionarios: $y''(-1) = -6 < 0$, o sea, $y_{\max} = 0$; $y''(1) = 6 > 0$, o sea, $y_{\min} = -4$.

Buscamos el punto de inflexión, para lo cual igualamos a cero la segunda derivada: $6x = 0$, o sea, $x = 0$. A la izquierda del punto $x = 0$ tenemos $y''(0 - h) < 0$, o sea, la curva es convexa y a la derecha del punto $x = 0$ tenemos $y''(0 + h) > 0$, o sea, la curva es cóncava; por consiguiente, el punto con abscisa $x = 0$ es de inflexión; $y_{\text{p.infl}} = -2$.

1068. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 5)^{5/3} + 2$.

Resolución. Hallamos

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{2/3}, \quad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

La segunda derivada no se anula para ningún valor de x y no existe en el punto $x = 5$. El valor $x = 5$ es la abscisa del punto de inflexión, ya que $y''(5 - h) < 0$, $y''(5 + h) > 0$. Por lo tanto, el punto $(5; 2)$ es de inflexión.

1069. Hallar los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva $y = xe^x$.

1070. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

1071. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 1)\sqrt[7]{(x - 1)^6}$.

1072. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

5. Asíntotas. Una recta L se llama *asíntota* a una curva $y = f(x)$ si la distancia de un punto $M(x; y)$ de la curva a la recta L tiende a cero cuando este punto se aleja indefinidamente por la curva a partir del origen de coordenadas (o sea cuando los puntos de una de las coordenadas, por lo menos, tiende a infinito).

La recta $x = a$ es *la asíntota vertical* de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ o bien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

La recta $y = b$ es *la asíntota horizontal* de la curva $y = f(x)$ si existe el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o bien $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

La recta $y = kx + b$ es *la asíntota oblicua* de la curva $y = f(x)$ si existen los límites

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx];$$

o bien,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

1073. Hallar las asíntotas de la curva $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.

Resolución. La función está definida en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]2, +\infty[$. Como $\lim\limits_{x \to 2+0} \sqrt{x^3/(x-2)} = +\infty$, la recta $x = 2$ es la asíntota vertical de la curva.

La curva no tiene asíntotas horizontales puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$ no son valores finitos.

Determinemos si existen asíntotas oblicuas. Hallamos

$$1)\ k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

De este modo, existe la asíntota oblicua derecha $y = x + 1$;

$$2)\ k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x/(x-2)}}{-1}$$

(hemos dividido el numerador y el denominador por el valor positivo $-x$), o sea,

$$k_2 = -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1.$$

De suerte que existe la asíntota oblicua izquierda $y = -x - 1$ (fig. 36).

1074. **Hallar las asíntotas de la curva $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$.**

Resolución. No es difícil ver que la curva no tiene asíntotas verticales ni horizontales. Buscamos las asíntotas oblicuas:

1) $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$

$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = 2 (\pi/2) = \pi;$

$y = x + \pi$ es la asíntota oblicua derecha;

2) $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$

$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = 2 \cdot (-\pi/2) = -\pi;$

$y = x - \pi$ es la asíntota oblicua izquierda.

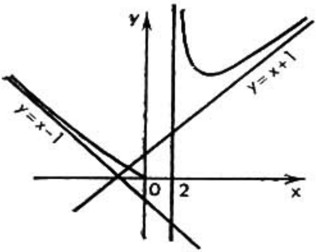


Fig. 36

1075. **Hallar las asíntotas de la curva $y = x^2 e^{-x}$.**

Resolución. Es evidente que no existen las asíntotas verticales. Si $x \to \infty$, entonces $y \to 0$. Por consiguiente, el eje Ox es la asíntota horizontal de la curva dada. Determinemos si existe o no asíntota oblicua.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

De modo que existe sólo la asíntota horizontal $y = 0$.

1076. **Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.**

Resolución. Si $x \to -2$, entonces $y \to \infty$, o sea $x = -2$ es la asíntota vertical. Buscamos las asíntotas no verticales:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x (x + 2)} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right] = -4.$$

Resulta que la asíntota oblicua tiene la ecuación $y = x - 4$.

Hallar las asíntotas de las curvas:

1077. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$.

1078. $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$. **1079.** $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

1080. $y=0{,}5x+\operatorname{arctg} x$. **1081.** $y=-x\operatorname{arctg} x$.

6. Construcción de los gráficos de funciones por los puntos característicos. Al construir el gráfico de una función $y=f(x)$ es útil revelar las particularidades características del mismo. Para esto es necesario:

1) hallar el campo de definición de la función;

2) investigar la función en cuanto a su paridad e imparidad;

3) hallar los puntos de intersección del gráfico de la función con los ejes de coordenadas;

4) investigar la función en cuanto a su continuidad; hallar los puntos de discontinuidad (si existen) y determinar el carácter de la discontinuidad; hallar las asíntotas de la curva $y=f(x)$;

5) hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función;

6) hallar los intervalos de convexidad y de concavidad y los puntos de inflexión de la curva.

1082. Construir el gráfico de la función $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

Resolución. 1) El campo de definición de la función es todo el eje Ox excluyendo el punto $x=0$, o sea, $D(y)=\left]-\infty, 0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

2) La función no es par o impar.

Hallamos los puntos en que el gráfico se interseca con el eje Ox; tenemos $\frac{x^3+4}{x^2}=0$; $x=-\sqrt[3]{4}$.

4) El punto de discontinuidad es $x=0$, además, $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$; por lo tanto, $x=0$ (eje Oy) es la asíntota vertical del gráfico.

Hallamos las asíntotas oblicuas:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

La asíntota oblicua tiene la ecuación $y=x$.

5) Hallamos los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Tenemos $y'=1-8/x^3=(x^3-8)/x^3$; $y'=0$ cuando $x=2$; $y'=\infty$ cuando $x=0$ (el punto de discontinuidad de la función).

Los puntos $x=0$ y $x=2$ dividen el eje numérico en los intervalos $\left]-\infty, 0\right[$, $\left]0, 2\right[$ y $\left]2, +\infty\right[$, con ello $y'>0$ en los intervalos $\left]-\infty, 0\right[$ y $\left]2, +\infty\right[$ (la función crece) e $y'<0$ en el intervalo $\left]0, 2\right[$ (la función decrece).

Luego hallamos $y''=24/x^4$; $y''(2)>0$; por lo tanto, $x=2$ es el punto del mínimo; $y_{\min}=3$.

6. Hallemos los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva y los puntos de su inflexión. Como $y''>0$, el gráfico de la función es cóncavo por doquier. La curva no tiene puntos de inflexión.

Utilizando los datos obtenidos, construimos el gráfico de la función (fig. 37).

1083. Construir el gráfico de la función $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Resolución. 1) El campo de definición es todo el eje Ox, o sea, $D(y)=\left]-\infty, +\infty\right[$.

2) La función no es par ni impar.

3) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas son: si $x=0$, entonces $y=1$; si $y=0$, $x=1$.

4) No hay puntos de inflexión ni asíntotas verticales. Tenemos:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0.$$

De suerte que la asíntota oblicua $y=-x$.

5) Hallamos $y'=-x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$; $y'=0$ cuando $x=0$; $y'=\infty$ cuando $x=1$. En el entorno de los puntos críticos la derivada no cambia el signo,

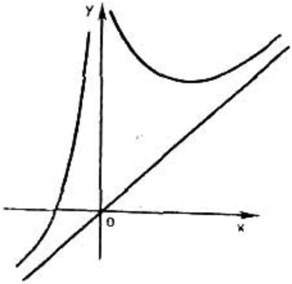


Fig. 37

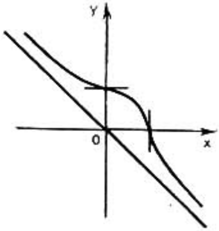


Fig. 38

no hay extremos. Puesto que $y'<0$ para todas las $x\neq 0$, la función decrece en todo el eje numérico.

6) Encontramos $y''=-2x/\sqrt[3]{(1-x^3)^5}$; $y''=0$ para $x=0$; $y''=\infty$ para $x=1$; $y''(-h)>0$; $y''(h)<0$; $y''(1-h)<0$; $y''(1+h)>0$. Por consiguiente, en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]1, +\infty[$ la curva es cóncava y en el intervalo $]0, 1[$ es convexa. Los puntos de inflexión tienen las coordenadas (0; 1) y (1; 0).

Utilizando los datos obtenidos, construimos el gráfico buscado (fig. 38).

Construir los gráficos de las funciones:

1084. $y=\operatorname{sen}^2 x$. **1085.** $y=3\sqrt[3]{x}-x$.

1086. $y=\ln x-\ln(x-1)$.

1087. $y=\ln\frac{x}{x-1}$. **1088.** $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

1089. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **1090.** $y=16x(x-1)^3$.

1091. $y=(x-1)\sqrt{x}$. **1092.** $y=x+e^{-x}$.

1093. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **1094.** $y=e^{2x-x^2}$.

1095. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$.

§ 3. Curvatura de una línea plana

Se llama *ángulo de contingencia* del arco AB de una línea plana al ángulo φ comprendido entre las tangentes trazadas en los puntos A y B de esta línea (fig. 39). La relación entre el ángulo de contingencia y la longitud s del arco AB se denomina *curvatura media* del arco AB:

$$k_m = \varphi/s.$$

Se llama *curvatura* de la línea dada en el punto A al límite de la curvatura media del arco AB cuando $B \to A$, o sea,

$$k = \lim_{s \to 0} (\varphi/s).$$

La curvatura de una circunferencia

$$k_{\text{cir}} = 1/a,$$

donde a es el radio de la circunferencia; la curvatura de una recta es igual a cero.

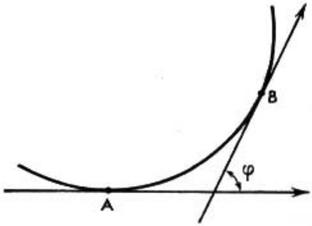


Fig. 39

Si la línea está definida por la ecuación $y = f(x)$, su curvatura se calcula por la fórmula

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Si la línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, entonces

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

donde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.

Si la línea está dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = f(\theta)$, entonces

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}},$$

donde $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$, $\rho'' = \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

Ha recibido el nombre de *radio de curvatura* la magnitud inversa a la curvatura:

$$R = 1/|k|.$$

Se llama *círculo de curvatura* o *círculo osculador* de la línea dada en su punto A a la posición límite de la circunferencia que pasa por tres puntos A, B, C de la curva cuando $B \to A$ y $C \to A$.

El radio del círculo de curvatura es igual al radio de curvatura. El centro del círculo de curvatura se denomina *centro de curvatura* y se encuentra sobre la normal a la línea trazada en el punto A hacia la concavidad de esta línea.

Las coordenadas ξ y η del centro de curvatura de una línea $y = f(x)$ se calculan por la fórmula

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Se llama *evoluta* de una línea al conjunto de sus centros de curvatura. Las fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la evoluta (donde de parámetro sirve la abscisa x de la línea inicial).

1096. Hallar la curvatura de la línea $y = -x^3$ en el punto con abscisa $x = 1/2$.

Resolución. Tenemos $y' = -3x^2$, $y'' = -6x$. Cuando $x = 1/2$ estas derivadas toman los valores $y' = -3/4$, $y'' = -3$ y

$$k = \left| \frac{-3}{(1+9/16)^{3/2}} \right| = \frac{3}{125/64} = \frac{192}{125}.$$

1097. Hallar la curvatura en un punto cualquiera de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Resolución. Hallamos

$$\dot{x} = a(1-\cos t),\ \ddot{x} = a \operatorname{sen} t,\ \dot{y} = a \operatorname{sen} t,\ \ddot{y} = a\cos t,$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = a^2(\cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = -a^2(1-\cos t),$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2a^2(1-\cos t),$$

$$k = \left| \frac{-a^2(1-\cos t)}{2^{3/2}a^3(1-\cos t)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}.$$

1098. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la línea $x^3 + y^4 = 2$ en el punto $M(1;\ 1)$.

Resolución. Derivemos dos veces la ecuación de la línea dada:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0\ (*),\quad 6x + 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0\ (**).$$

Como $x = 1$, $y = 1$, entonces de la ecuación $(*)$ hallamos $y' = -3/4$ y de la ecuación $(**)$ obtenemos $6 + 27/4 + 4y'' = 0$, o sea, $y'' = -51/16$. Entonces

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} = 1 - \frac{(1+9/16)\ (-3/4)}{-51/16} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{1+9/16}{-51/16} = \frac{26}{51},$$

o sea, $C\,(43/68;\ 26/51)$.

1099. Escribir la ecuación de la evoluta de la parábola $2y^2 = 2x + 1$.

Resolución. **Derivamos dos veces la ecuación de la parábola:**

$$4yy' = 2,\quad y' = \frac{1}{2y};\quad 4y'^2 + 4yy'' = 0,\quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Determinamos las coordenadas del centro de curvatura:

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\cdot y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-1/(4y^3)} = 3y^2,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{-1/(4y^3)} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Obtenemos la ecuación de la evoluta en la forma paramétrica: $\xi = 3y^2$, $\eta = -4y^3$. Excluyendo el parámetro y, encontramos la ecuación de la evoluta en la forma explícita: $\eta^2 = 16\ \xi^3/27$.

1100. Hallar el radio de curvatura de la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ en el punto M (0; 3).

1101. Hallar el radio de curvatura en un punto cualquiera de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.

1102. Hallar la curvatura de la línea $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ en el punto $t = 1$.

1103. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la línea $y = 1/x$ en el punto M (1; 1).

1104. Escribir la ecuación de la evoluta de la curva $x = t \operatorname{sen} t + \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t$.

§ 4. Orden de tangencia de las curvas planas

Si las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen un punto común $M(x_0, y_0)$, o sea, $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ y las tangentes trazadas en el punto $M(x_0; y_0)$ a las curvas indicadas no coinciden, se dice que las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ *se intersecan* en el punto M. La condición de intersección de estas curvas en el punto $M(x_0; y_0)$ es la siguiente:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) \neq \varphi'(x_0).$$

Pero si estas curvas tienen el punto común $M(x_0; y_0)$ y las tangentes trazadas en este punto a ambas curvas coinciden, se dice que las curvas *son tangentes* en el punto M. La condición de tangencia de las curvas en el punto $M(x_0; y_0)$ es la siguiente:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Si, por fin,

$$f(x_0) = \varphi(x_0),\ f'(x_0) = \varphi'(x_0),\ f''(x_0) = \varphi''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

pero $f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0)$, se dice que en el punto $M(x_0; y_0)$ las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen la *tangencia de n-ésimo orden*.

Si $n \geqslant 2$, entonces las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen en el punto $M(x_0, y_0)$ no sólo la tangente común sino también la misma curvatura.

1105. ¿Qué orden de tangencia tienen las curvas $y = e^{-x}$ y $xy = 1/e$ en el punto $x = 1$?

Resolución. Sean $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(x) = 1/(ex)$. Hallamos las derivadas sucesivas de estas funciones: $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $\varphi'(x) = -1/(ex^2)$, $\varphi''(x) = 2/(ex^3)$, ... Ahora calculamos los valores de las funciones dadas y de sus derivadas en el punto $x = 1$; tenemos $f(1) = e^{-1}$, $f'(1) = -e^{-1}$, $f''(1) = e^{-1}$; $\varphi(1) = e^{-1}$, $\varphi'(1) = -e^{-1}$, $\varphi''(1) = 2e^{-1}$. De este modo, $f(1) = \varphi(1)$, $f'(1) = \varphi'(1)$, pero $f''(1) \neq \varphi''(1)$. Por consiguiente, las curvas indicadas tienen una tangencia de primer orden.

1106. ¿Para qué parámetro a la curva $y = e^{ax}$ tiene en el punto $x = 0$ una tangencia de primer orden con la recta $y = 2x + 1$?

Resolución. Sean $f(x) = e^{ax}$ y $\varphi(x) = 2x + 1$. Para que las líneas indicadas tengan en el punto $x = 0$ una tangencia de primer orden es necesario que se cumplan las igualdades $f(0) = \varphi(0)$ y $f'(0) = \varphi'(0)$, o sea, $e^{a \cdot 0} = 2 \cdot 0 + 1$ y $ae^0 = 2$, de donde $a = 2$.

1107. ¿Qué orden de tangencia tienen las curvas $y = 1 + \cos x$ e $y = 2 - x^2$ en el punto $x = 0$?

1108. ¿Qué orden de tangencia con el eje Ox tiene en el punto $x = 0$ la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$?

1109. ¿Qué orden de tangencia tiene la catenaria $y = (e^x + e^{-x})/2$ con la parábola $y = 1 + x^2/2$ en el punto $x = 0$?

1110. ¿Qué orden de tangencia tienen las circunferencias $x^2 + y^2 = 2y$ y $x^2 + y^2 = 4y$ en el punto $x = 0$?

1111. ¿Qué orden de tangencia tienen la parábola $y = x^4$ y el eje Ox en el punto $x = 0$?

1112. ¿Qué orden de tangencia tiene la curva $y = \ln(1 + x)$ con la parábola $y = x - x^2$ en el punto $x = 0$?

§ 5. Función vectorial de un argumento escalar y su derivada

Una curva espacial puede definirse por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

o por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

La última ecuación define el vector variable $\mathbf{r}$ como *función vectorial* de un argumento escalar t, o sea, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. La curva definida por la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se llama *hodógrafo* del vector variable $\mathbf{r}$.

Se denomina *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con respecto al argumento escalar t, a la nueva función vectorial definida por la igualdad

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

La derivada de la función vectorial se puede calcular por la fórmula

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}.$$

La derivada $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es el vector orientado por la tangente al hodógrafo del vector $\mathbf{r}$ hacia el crecimiento del parámetro t.

Si t es el tiempo, entonces $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es el vector de velocidad del extremo del vector $\mathbf{r}$ y $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ es el vector de aceleración.

Las reglas principales de derivación de la función vectorial de un argumento escalar son las siguientes:

1ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}$;

2ª. $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante;

3ª. $\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{d\lambda}{dt}$, donde $\lambda = \lambda(t)$ es función escalar de t;

4ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$;

5ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$.

Las *ecuaciones de una tangente* a una curva espacial $\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ en un punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ se escriben en la forma

$$(x-x_0)/\dot{x}_0 = (y-y_0)/\dot{y}_0 = (z-z_0)/\dot{z}_0,$$

donde $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $\dot{x}_0 = x'(t_0)$, $\dot{y}_0 = y'(t_0)$, $\dot{z}_0 = z'(t_0)$.

Se llama *plano normal* al que pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a la tangente. La *ecuación de un plano normal* tiene la forma

$$\dot{x}_0(x-x_0) + \dot{y}_0(y-y_0) + \dot{z}(z-z_0) = 0.$$

La *diferencial del arco de una curva espacial* se calcula por la fórmula

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

1113. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos t + a\mathbf{j}\operatorname{sen} t + ct\mathbf{k}$?

Resolución. Esta línea tiene las ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = ct$ que definen una hélice.

1114. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j} + \mathbf{k}\operatorname{sen} t$?

1115. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$?

1116. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$?

1117. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\operatorname{sh} t$?

1118. Hallar la derivada del producto escalar de los vectores $\mathbf{r}_1 = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{d(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \mathbf{r}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} =$$
$$= (3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\cdot(-3\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot 3\mathbf{i} = -6 + 6 = 0.$$

El resultado se explica por el hecho de que el producto escalar $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 = 5$, o sea, es una constante.

1119. Mostrar que los vectores $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\operatorname{sen} t + \mathbf{k}$ y $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ son perpendiculares.

Resolución. Tenemos $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}\operatorname{sen} t + \mathbf{j}\cos t$. Hallamos el producto escalar:

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\cos t\cdot\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\cdot\cos t + 1\cdot 0 = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbf{r} \perp \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

1120. Hallar la derivada de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{ch}^2 t + \mathbf{j}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\operatorname{sh}^2 t$.

1121. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{sh} t + \mathbf{j}\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 3\operatorname{sh}^2 t}$. Hallar $\frac{d(\mathbf{r}^2)}{dt}$.

1122. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t$. Hallar $\frac{d(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)}{dt}$.

1123. Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = b \operatorname{sen} t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ en el punto $t = \pi/4$.

Resolución. Hallamos $\dot{x} = a \operatorname{sen} 2t$, $\dot{y} = b \cos 2t$; $\dot{z} = -c \operatorname{sen} 2t$. Cuando $t = \pi/4$ tenemos: $x_0 = a/2$, $y_0 = b/2$, $z_0 = c/2$, $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = -c$.

Las ecuaciones de la tangente son:

$$(x - a/2)/a = (y - b/2)/0 = (z - c/2)/(-c).$$

La ecuación del plano normal es:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0, \quad \text{o bien} \quad ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0.$$

1124. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la hélice $\mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \operatorname{sen} t + \sqrt{3}\, t\mathbf{k}$ en el punto $t = \pi/2$.

1125. Sobre la curva $x = t + 1$, $y = t^2 - 1$, $z = t^3$ hallar un punto en que la tangente sea paralela al plano $x + 2y + z - 1 = 0$.

1126. ¿Qué angulo forma con el plano xOy la tangente a la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 2\sqrt{2t}$ en el punto $t = \pi/4$?

1127. Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = (1/\sqrt{2})\, e^t \operatorname{sen} t$, $y = 1$, $z = (1/\sqrt{2})\, e^t \cos t$ en el punto $t = 0$.

1128. Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva $x = e^t (\cos t + \operatorname{sen} t)$, $y = e^t (\operatorname{sen} t - \cos t)$, $z = e^t$ en el punto $t = 0$.

1129. Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ en el punto $t = 1$.

1130. Mostrar que las curvas $\mathbf{r} = (u + 1)\,\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (2u - 1)\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = 2v^2\mathbf{i} + (3v - 2)\,\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$ se intersecan y determinar el ángulo entre las curvas en el punto de su intersección.

1131. Escribir las ecuaciones de la hélice, si el radio de la base del cilindro $R = 4$, el paso $h = 6\pi$, y hallar la diferencial de su arco.

Resolución. Las ecuaciones de la hélice tienen la forma $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $z = 3t$, puesto que $z = h$ cuando $t = 2\pi$. Derivemos estas ecuaciones: $\dot{x} = -4 \operatorname{sen} t$, $\dot{y} = 4 \cos t$, $\dot{z} = 3$. Por consiguiente, la diferencial del arco es igual a

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 9}\, dt = \sqrt{16 (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 9}\, dt = 5\, dt.$$

1132. Hallar la diferencial del arco de la curva $x = a \cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} t \cos t$, $z = b \operatorname{sen}^2 t$.

1133. ¿Para qué paso h la longitud de una espira de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = ct$ es igual a 4π?

Indicación. Es necesario valerse de que al desarrollar el cilindro sobre el plano una espira de la hélice se convierte en segmento de la recta.

1134. La ecuación de movimiento tiene la forma $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} \cos t + 3\mathbf{j} \operatorname{sen} t + 4t\mathbf{k}$, donde t es el tiempo. Determinar la velocidad y la aceleración de movimiento en un instante arbitrario del tiempo.

1135. La ecuación de movimiento tiene la forma $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Determinar la velocidad y la aceleración de movimiento en el instante $t = 1$.

§ 6. Triedro intrínseco de una curva espacial. Curvatura y torsión

En todo punto M (x; y; z) de una curva espacial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se puede construir tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares (fig. 40): el vector unitario *tangente* (vector tangente)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|};$$

el vector unitario de la *normal principal*

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|};$$

el vector unitario de la *binormal*

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}$$

Los vectores no unitarios respectivos pueden determinarse por las fórmulas:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ (vector tangente)},$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \text{ (vector de la binormal)},$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \text{ (vector de la normal principal)}.$$

El plano que contiene los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\nu}$ se llama plano *osculador*; el que contiene los vectores $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ se denomina plano *normal* y el que contiene los vectores $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\tau}$, plano *rectificante*.

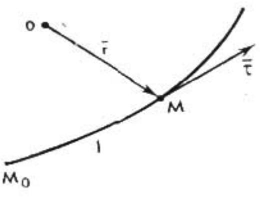


Fig. 40

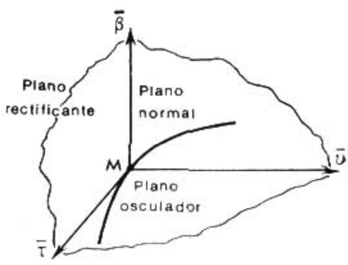


Fig. 41

El triedro, con vértice en el punto M, formado por los planos osculador, normal y rectificante ha recibido el nombre de *triedro intrínseco* de una curva espacial (fig. 41).

Se llama *curvatura* de la línea en el punto M al número

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

donde φ es el ángulo de rotación de la tangente (ángulo de contingencia) sobre el arco MN; Δs, la longitud de este arco.

Si la curva se define por la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, entonces $K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|$.

Si la ecuación de una curva tiene la forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, entonces

$$K = \frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.$$

Se denomina *torsión* de una curva en un punto M al número

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s},$$

donde θ es el ángulo de rotación de la binormal (ángulo de contingencia de segunda especie) sobre el arco MN.

Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, entonces $\sigma = \pm \left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|$, donde el signo «—» se toma en el caso en que los vectores $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ y $\boldsymbol{\nu}$ tienen el mismo sentido y el signo «+» en el caso en que ellos tienen sentidos opuestos.

Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, entonces

$$\sigma = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\right|^2}.$$

1136. Hallar el vector tangente τ a la curva $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$ en el punto $t = 1$.

Resolución. Tenemos:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 6t^5\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 36t^{10}}.$$

Para $t = 1$ encontramos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7,$$

$$\tau = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{2}{7}\,\mathbf{i} + \frac{3}{7}\,\mathbf{j} + \frac{6}{7}\,\mathbf{k}.$$

1137. Hallar el vector unitario tangente a la curva $\mathbf{r} = 5t\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\cos t + 12\mathbf{k}\,\mathrm{sen}\,t$ en un punto cualquiera.

1138. Hallar el vector unitario tangente a la curva $x = t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t$, $y = t\cos t - \mathrm{sen}\,t$, $x = t^2\sqrt{2}$ en el punto $t = \pi/2$.

1139. Hallar el vector $\boldsymbol{\tau}$ de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$ $z = \sqrt{R^2 - a^2}\,t$, $R > a > 0$ en un punto cualquiera.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos t + a\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t + \sqrt{R^2 - a^2}\,t\mathbf{k},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{-a\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k}}{R} =$$

$$= -\frac{a\,\mathrm{sen}\,t}{R}\,\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{R}\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{R}\,\mathbf{k}.$$

1140. Hallar el vector $\boldsymbol{\beta}$ de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\mathbf{i}\cos t - a\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t.$$

Hallemos el producto vectorial de estos vectores:

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathrm{sen}\,t\cdot\mathbf{i} - a\sqrt{R^2 - a^2}\cos t\cdot\mathbf{j} + a^2\mathbf{k};$$

$$|\mathbf{B}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{a^2(R^2 - a^2)\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2(R^2 - a^2)\cos^2 t + a^4} = aR.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{a\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t - a\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{j}\cos t + a^2\mathbf{k}}{aR} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t\cdot\mathbf{i} - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\cos t\cdot\mathbf{j} + \frac{a}{R}\,\mathbf{k}.$$

1141. Hallar el vector $\boldsymbol{\nu}$ de la hélice en un punto cualquiera,

Resolución. Como $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$, entonces

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathrm{sen}\,t}{R} & -\dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\cos t}{R} & \dfrac{a}{R} \\ -\dfrac{a\,\mathrm{sen}\,t}{R} & \dfrac{a\cos t}{R} & \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \end{vmatrix} = -\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t.$$

1142. Hallar la curvatura K de la hélice.

Resolución. En los problemas 1139 y 1140 hemos encontrado que

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=R,\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=aR, \text{ por eso}$$

$$K=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}=\frac{aR}{R^3}=\frac{a}{R^2}.$$

1143. Hallar la torsión σ de la hélice.

Resolución. *Zenemos*

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-a\mathbf{i}\operatorname{sen}t+a\mathbf{j}\cos t+\sqrt{R^2-a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-a\mathbf{i}\cos t-a\mathbf{j}\operatorname{sen}t,$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=a\mathbf{i}\operatorname{sen}t-a\mathbf{j}\cos t.$$

Hallamos el producto mixto de estos vectores:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=\begin{vmatrix}-a\operatorname{sen}t & a\cos t & \sqrt{R^2-a^2}\\ -a\cos t & -a\operatorname{sen}t & 0\\ a\operatorname{sen}t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2\sqrt{R^2-a^2}.$$

En el problema 1140 hemos encontrado que $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=aR$. Por consiguiente, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|^2=a^2R^2$. De este modo,

$$\sigma=\frac{a^2\sqrt{R^2-a^2}}{a^2R^2}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}.$$

1144. Escribir la ecuación del plano osculador de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Este plano pasa por el punto $(a\cos t;\ a\operatorname{sen}t;\ \sqrt{R^2-a^2}\,t)$ y es perpendicular al vector de la binormal

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}\operatorname{sen}t}{R}\,\mathbf{i}-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\,\mathbf{j}+\frac{a}{R}\,\mathbf{k}.$$

Por eso la ecuación del plano osculador es la siguiente:

$$\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\operatorname{sen}t\,(X-a\cos t)-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\times$$

$$\times(Y-a\operatorname{sen}t)+\frac{a}{R}\,(Z-\sqrt{R^2-a^2}\,t)=0,$$

o bien

$$X\cdot\sqrt{R^2-a^2}\operatorname{sen}t-Y\cdot\sqrt{R^2-a^2}\cdot\cos t+aZ-a\sqrt{R^2-a^2}\,t=0.$$

1145. Escribir la ecuación del plano rectificante de la hélice en un punto cualquiera.

Resolución. Este plano pasa por el punto $(a\cos t;\ a\operatorname{sen}t;\ \sqrt{R^2-a^2}t)$ perpendicularmente al vector de la normal principal $\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{i}\cos t-\mathbf{j}\operatorname{sen}t$.

Por eso la ecuación buscada tiene la forma

$$-(X - a\cos t)\cos t - (Y - a \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t = 0,$$

o sea $X\cos t + Y \operatorname{sen} t - a = 0$.

1146. Escribir la ecuación del plano normal de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Este plano es perpendicular al vector tangente $\boldsymbol{\tau} = -\frac{a \operatorname{sen} t}{R}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{R}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\mathbf{k}$ y pasa por el punto $(a\cos t;\ a \operatorname{sen} t;\ \sqrt{R^2-a^2}\,t)$. Por eso la ecuación buscada tiene la forma

$$-\frac{a \operatorname{sen} t}{R}(X - a\cos t) + \frac{a\cos t}{R}(Y - a \operatorname{sen} t) + \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\left(Z - \sqrt{R^2-a^2}\,t\right) = 0,$$

o bien

$$X a \operatorname{sen} t - Y a\cos t - Z\sqrt{R^2-a^2} + (R^2-a^2)\,t = 0.$$

1147. Hallar el vector $\boldsymbol{\tau}$ de la curva $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = t^3$ en el punto $t = 1$.

1148. Hallar el vector $\boldsymbol{\beta}$ de la misma curva cuando $t = 1$.

1149. Hallar el vector $\boldsymbol{\nu}$ de la misma curva cuando $t = 1$.

1150. Hallar la curvatura K de la misma curva cuando $t = 1$.

1151. Hallar la torsión σ de la misma curva cuando $t = 1$.

1152. *Escribir la ecuación del plano osculador de la misma* curva cuando $t = 1$.

1153. Escribir la ecuación del plano rectificante de la misma curva cuando $t = 1$.

1154. Escribir la ecuación del plano normal de la misma curva cuando $t = 1$.

Capítulo VIII. Cálculo diferencial de funciones de varias variables independientes

§ 1. Campo de definición de una función. Líneas y superficies de nivel

Sean dados dos conjuntos no vacíos D y U. Si a cada par de números reales $(x;\ y)$ perteneciente al conjunto D se le pone en correspondencia, según una regla determinada, un y sólo un elemento u de U, se dice que sobre el conjunto D está representada *la función f* (o *aplicación*) con el conjunto de valores U. Esto se escribe $D \xrightarrow{f} U$, o bien $f: D \to U$. El conjunto D se llama *campo de definición* de la función y el conjunto U, compuesto de todos los números del tipo $f(x,\ y)$, donde $(x;\ y) \in D$, se denomina *conjunto de valores* de la función. El valor de la función $u = f(x,\ y)$ en un punto $M(x_0;\ y_0)$ se designa por $f(x_0,\ y_0)$ o bien por $f(M)$.

El campo de definición de la función $u = f(x,\ y)$ es, en los casos elementales, la parte de un plano limitada por una curva cerrada, siendo que los puntos de esta curva (fronteras del campo) pueden pertenecer o no al campo de definición; bien sea todo el plano, o, por último, el campo de difinición puede ser el conjunto de varias partes del plano xOy. La representación geométrica de la función $u = f(x,\ y)$ en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyu$ (gráfico de la función) es una superficie.

Análogamente se define la función de cualquier número de variables $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$.

Se dice *línea de nivel* de una función $u = f(x,\ y)$ a la línea $f(x,\ y) = C$ sobre el plano xOy, en cuyos puntos la función conserva un valor constante $u = C$.

Se llama *superficie de nivel* de una función $u = f(x,\ y,\ z)$ a la superficie $f(x\ y,\ z) = C$ en cuyos puntos la función conserva un valor constante $u = C$.

1155. Hallar el campo de definición de la función $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Resolución. La función u toma valores reales a condición de que $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, o bien $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, o sea, el campo de definición de la función dada es un círculo de radio a con centro en el origen de las coordenadas incluyendo la circunferencia de frontera.

1156. Hallar el campo de definición de la función $u = \arcsen (x/y^2)$.

Resolución. Esta función está definida si $y \neq 0$ y $-1 \leqslant x/y^2 \leqslant 1$, o sea, $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$. El campo de definición de la función es la parte del plano comprendida entre dos parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = -x$, excluyendo el punto $O\ (0;\ 0)$.

1157. Hallar el campo de definición de la función $u = \ln (2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Resolución. La función dada depende de tres variables y toma valores reales cuando $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, o bien $x^2/1 + y^2/2 - z^2/3 < -1$, o sea, el campo de definición de la función es la parte del espacio comprendida dentro de las hojas de un hiperboloide de dos hojas.

1158. Hallar las líneas de nivel de la función $u = x^2 + y^2$.

Resolución. La ecuación de la familia de las rectas de nivel tiene la forma $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$. Asignando a C diferentes valores reales, obtendremos circunferencias concéntricas con centro en el origen de las coordenadas.

1159. Hallar las superficies de nivel de la función $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Resolución. La ecuación de la familia de las superficies de nivel tiene la forma $x^2 + z^2 - y^2 = C$. Si $C = 0$, obtenemos $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, o sea, un cono; si $C > 0$, entonces $x^2 + z^2 - y^2 = C$ es la familia de hiperboloides de una hoja; si $C < 0$, entonces $x^2 + z^2 - y^2 = C$ es la familia de hiperboloides de dos hojas.

Hallar los campos de definición de las funciones:

1160. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. **1161.** $u = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1162. $u = \operatorname{arcsen}(x + y)$. **1163.** $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

1164. $u = \ln(-x + y)$. **1165.** $u = y + \sqrt{x}$.

1166. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. **1167.** $u = \operatorname{arcsen}\left(z/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

1168. $u = 1/\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$. **1169.** $u = \sqrt{x + y + z}$.

Hallar las líneas de las funciones:

1170. $z = 2x + y$. **1171.** $z = x/y$. **1172.** $z = \ln\sqrt{y/x}$.

1173. $z = \sqrt{x}/y$. **1174.** $z = e^{xy}$.

Hallar las superficies de nivel de las funciones:

1175. $u = x + y + 3z$. **1176.** $u = x^2 + y^2 + z^2$.

1177. $u = x^2 - y^2 - z^2$.

§ 2. Derivadas y diferenciales de funciones de varias variables

1. Derivadas parciales de primer orden. Se llama *derivada parcial* de una función $z = f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x a la derivada

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

calculada para y constante.

Se denomina derivada parcial con respecto a y a la derivada

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y),$$

calculada para x constante.

Para las derivadas parciales son válidas las reglas y fórmulas de derivación corrientes.

1178. $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Resolución. Considerando y como una constante, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-$ $-3y-1$. Considerando x como una constante. hallamos $\frac{\partial u}{\partial y}=-3x-8y+2$.

1179. $z=e^{x^2+y^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x=2xe^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y=2ye^{x^2+y^2}.$$

1180. $\rho=u^4\cos^2\varphi$. Hallar $\frac{\partial\rho}{\partial u}$ y $\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}=4u^3\cos^2\varphi, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}=u^4\cdot 2\cos\varphi(-\operatorname{sen}\varphi)=-u^4\operatorname{sen}2\varphi.$$

1181. Mostrar que la función $z=y\ln(x^2-y^2)$ satisface la ecuación $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

Resolución. Hallamos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{x^2-y^2}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\ln(x^2-y^2)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Sustituimos las expresiones halladas en el primer miembro de la ecuación:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\left[\ln(x^2-y^2)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right]=$$
$$=\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{\ln(x^2-y^2)}{y}\equiv\frac{z}{y^2}.$$

Obtenemos una identidad, o sea, la función z satisface la ecuación dada.

1182. Mostrar que la función $z=y^{y/x}\operatorname{sen}(y/x)$ satisface la ecuación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.

Resolución. Hallamos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{y/x}\ln y\left(-\frac{y}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)+y^{y/x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[y^{y/x}\cdot\ln y\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{y}{x}\cdot y^{y/x-1}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)+y^{y/x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

Sustituimos las expresiones halladas en el primer miembro de la ecuación:

$$-x^2\frac{y}{x^2}\cdot y^{y/x}\cdot\ln y\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)-x^2\cdot\frac{y}{x^2}\cdot y^{y/x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+$$
$$+xy\cdot\frac{y}{x}\cdot y^{y/x-1}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)+xy\cdot\frac{1}{x}\cdot y^{y/x}\cdot\ln y\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)+$$
$$+xy\cdot\frac{1}{x}\cdot y^{y/x}\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)=yy^{y/x}\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)\equiv yz.$$

Obtenemos una identidad; por consiguiente, la función z satisface la ecuación dada.

1183. $u=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1184. $r=\rho^2 \operatorname{sen}^4\theta$. Hallar $\frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{\partial r}{\partial \theta}$.

1185. $u=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1186. $z=e^{xy(x^2+y^2)}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1187. $u=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1188. $u=e^{x/y}+e^{-z/y}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1189. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1190. $z=e^{(x^2+y^2)^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1191. $u=(x-y)(x-z)(y-z)$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1192. $u=e^{3x^2+2y^2-xy}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$.

1193. $u=e^{xyz}\cdot\operatorname{sen}\frac{y}{x}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1194. Mostrar que la función $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ satisface la ecuación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

1195. Hallar $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ si $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$.

2. **Diferencial total.** Se llama *incremento total* de una función $z=f(x, y)$ en un punto $M(x; y)$ a la diferencia $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$, donde Δx y Δy son incrementos arbitrarios de los argumentos.

La función $z=f(x, y)$ se llama *diferenciable* en el punto (x, y) si en este punto el incremento total puede representarse en la forma

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

donde $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Se denomina *diferencial total* de una función $z=f(x, y)$ a la parte principal del incremento total Δz, la cual es lineal con respecto a los incrementos de los argumentos Δx y Δy, o sea, $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

Las diferenciales de variables independientes coinciden con sus incrementos, o sea, $dx=\Delta x$ y $dy=\Delta y$.

La diferencial total de la función $z=f(x, y)$ se calcula por la fórmula

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Análogamente, la diferencial total de una función de tres argumentos $u=f(x, y, z)$ se calcula por la fórmula

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Con un $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ suficientemente pequeño para una función derivable $z = f(x, y)$ son válidas las igualdades aproximadas

$$\Delta z \approx dz; \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

1196. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$. Hallar dz.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Por consiguiente,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

1197. $u = x^{y^2 z}$. Hallar du.

Resolución. Tenemos $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Por consiguiente,

$$du = y^2 z x y^{2z-1} dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x\, dy + y^2 x^{y^2 z} \cdot \ln x\, dz.$$

1198. Calcular aproximadamente $\sqrt{\operatorname{sen}^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 8e^y}$ para $x = \pi/2 \approx 1{,}571$, $y = 0$.

Resolución. El número buscado es el valor incrementado de la función z cuando $\Delta x = 0{,}021$, $\Delta y = 0{,}015$. Hallamos el valor de z para $x = \pi/2$, $y = 0$: tenemos $z = \sqrt{\operatorname{sen}^2(\pi/2) + 8e^0} = 3$. Encontramos el incremento de la función:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\operatorname{sen} 2x\, \Delta x + 8e^y\, \Delta y}{2\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 8e^y}} = \frac{8 \cdot 0{,}015}{6} = 0{,}02.$$

Por lo tanto, $\sqrt{\operatorname{sen}^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}} \cong 3{,}02$.

1199. Calcular aproximadamente $\operatorname{arctg}(1{,}02/0{,}95)$ partiendo del valor de la función $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ para $x = 1$, $y = 1$.

Resolución. El valor de la función z para $x = 1$, $y = 1$ es $z = \operatorname{arctg}(1/1) = \pi/4 \cong 0{,}785$. Hallemos el incremento de la función Δz cuando $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = -\frac{y\,\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\Delta y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\,\Delta y - y\,\Delta x}{x^2+y^2} = \frac{1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}035,$$

Por consiguiente, $\operatorname{arctg}(1{,}02/0{,}95) = z + \Delta z \approx 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82$.

1200. $z = \ln(x^2 + y^2)$. Hallar dz.

1201. $z = \ln \operatorname{tg}(y/x)$. Hallar dz.

1202. $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$. Hallar dz.

1203. $z = x^y$. Hallar dz.

1204. $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Hallar du.

1205. $z = e^x(\cos y + x \operatorname{sen} y)$. Hallar dz.

1206. $z = e^{x+y}(x \cos y + y \operatorname{sen} x)$. Hallar dz.

1207. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{2(x + \operatorname{sen} y)}{4 - x \operatorname{sen} y}$. Hallar dz.

1208. $u = e^{xyz}$. Hallar du.

1209. Calcular aproximadamente $1{,}02^{4{,}05}$ partiendo del valor de la función $z = x^y$ para $x = 1$, $y = 4$ y sustituyendo su incremento por la diferencial.

1210. Calcular aproximadamente $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$ partiendo del valor de la función $z = \ln(x^3 + y^3)$ para $x = 0$, $y = 1$.

1211. Calcular aproximadamente $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ para $x = 1$, $y = 0$.

1212. Calcular aproximadamente $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ para $x = 0$, $y = 2$.

1213. Calcular aproximadamente $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$ partiendo del valor de la función $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ para $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

3. Derivadas parciales y diferenciales de órdenes superiores. Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $z = f(x, y)$ a las derivadas parciales de las derivadas parciales de primer orden. Las anotaciones de las derivadas parciales de segundo orden son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Análogamente se definen y se designan las derivadas parciales de tercer orden y de órdenes superiores, por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y),$$

etc.; las llamadas derivadas «mixtas» que se distinguen una de otra sólo por la sucesión de derivación son iguales entre sí si son continuas, por ejemplo, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial y \partial x}$.

Se denomina *diferencial de segundo orden* de la función $z = f(x, y)$ a la diferencial de su diferencial total, o sea, $d^2 z = d(dz)$.

De un modo análogo se definen las diferenciales de tercer orden y de órdenes superiores: $d^3 z = d(d^2 z)$; en general, $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Si x e y son variables independientes y la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas, las diferenciales de órdenes superiores se calculan por las fórmulas:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}\, dx^2\, dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}\, dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\, dy^3;$$

en general tiene lugar una fórmula simbólica

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$

que se resuelve formalmente según la ley binomial.

1214. $z = y \ln x$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x.$$

Derivando repetidamente, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} = (\ln x) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

1215. $z = \ln \operatorname{tg} (y/x)$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} (y/x)} \cdot \sec^2 (y/x) \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen} (2y/x)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen} (2y/x)} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{-2 \cos (2y/x) \cdot (2/x)}{\operatorname{sen}^2 (2y/x)} =$$

$$= \frac{2}{x^3 \cdot \operatorname{sen}^2 (2y/x)} \cdot (2y \cos (2y/x) - x \operatorname{sen} (2y/x)).$$

1216. $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Hallar $d^2 z$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

$$d^2 z = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \, dx^2 + 2 \cos x \cos y \, dx \, dy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \, dy^2.$$

1217. $z = x^2 y$. Hallar $d^3 z$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2} = 0;$$

$$d^3 z = 0 \cdot dx^3 + 3 \cdot 2 \, dx^2 \, dy + 3 \cdot 0 \cdot dx \cdot dy^2 + 0 \cdot dy^3 = 6 \, dx^2 \, dy.$$

1218. $u = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$.

1219. $u = xy + \operatorname{sen} (x + y)$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1220. $u=\ln \operatorname{tg}(x+y)$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$.

1221. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

1222. $z=x^2\ln(x+y)$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

1223. $u=x \operatorname{sen} xy+y\cos xy$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1224. $u=\operatorname{sen}(x+\cos y)$. Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y}$.

1225. $z=0{,}5\ln(x^2+y^2)$. Hallar d^2z.

1226. $z=\cos(x+y)$. Hallar d^2z.

1227. $z=\cos(ax+e^y)$. Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$.

1228. $u=\frac{x^4-8xy^3}{x-2y}$. Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y}$.

1229. $z=x^2y^3$. Comprobar que $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y^3}=\frac{\partial^5 z}{\partial y^3\, \partial x^2}$.

1230. $z=x^2+y^2-xy-2x+y+7$. Hallar d^2z.

1231. Mostrar que la función $z=\varphi(x)g(y)$ satisface la ecuación $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

1232. Mostrar que la función $z=g(x)+yg'(x)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

1232. 1) Comprobar, que la función $u=ye^{x^2-y^2}$, satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$.

2) Comprobar, que la función $u=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ satisface la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3) Hallar d^2u, si $u=e^{xy}$.
4) Hallar d^2u, si $u=\ln(x+y)$.
5) Hallar d^3u, si $u=xyz$.
6) Hallar d^3u, si $u=\frac{y}{x}$.
7) Hallar d^4u, si $u=x\ln y$.
8) Hallar d^5u, si $u=e^{x+y}$.

4. Derivación de funciones complejas. Sean $z=f(x,y)$ donde $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ y las funciones $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ son derivables.

Entonces la derivada de la función compuesta $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ se calcula por la fórmula

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Si $z = f(x, y)$, donde $y = \varphi(x)$, entonces la *derivada total* de z respecto a x se determina por la fórmula

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Pero si $z = f(x, y)$, donde $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, entonces las derivadas parciales se expresan del modo siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

1233. $z = e^{x^2+y^2}$, donde $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$. Hallar $\frac{dz}{dt}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x(-a \operatorname{sen} t) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y(a\cos t) =$$
$$= 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x \operatorname{sen} t).$$

Expresando x e y por t, obtendremos

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a \operatorname{sen} t \cos t - a\cos t \operatorname{sen} t) = 0.$$

1234. $z = \ln(x^2 - y^2)$, donde $y = e^x$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$.

Resolución. Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}$. Utilizando la fórmula de derivada total, encontramos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2ye^x}{x^2-y^2} = \frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$$

1235. $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, donde $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1236. $z = \frac{x^2-y}{x^2+y}$, donde $y = 3x+1$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1237. $z = x^2y$, donde $y = \cos x$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$.

1238. $z = \ln\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$, donde $y = x\cos\alpha$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1239. $z = x^2+y^2$, donde $x = \xi+\eta$, $y = \xi-\eta$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$.

1240. $u = \ln(x^2+y^2)$ donde $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

1241. Mostrar que la función $u = \ln(1/r)$, donde $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Derivada en el sentido dado. Gradiente de una función. Se llama *derivada* de una función $z = f(x, y)$ en un punto $M(x, y)$ *en el sentido* del vector $\mathbf{l} = \overline{MM_1}$ al límite

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho},$$

donde $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Si la función $f(x, y)$ es derivable, entonces la derivada en el sentido dado se calcula por la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por el vector **l** con el eje Ox.

En el caso de una función de tres variables $u = f(x, y, z)$ la derivada en el sentido dado se determina de un modo análogo. La fórmula respectiva tiene el aspecto

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector **l**.

Se denomina *gradiente* de una función $z = f(x, y)$ en un punto $M(x; y)$ al vector que sale del punto M y sus coordenadas son las derivadas parciales de la función z:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}.$$

El gradiente de una función y la derivada en el sentido del vector **l** se hallan relacionados por la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\operatorname{der}_1 \operatorname{grad} z.$$

El gradiente indica el sentido del crecimiento más rápido de una función en el punto dado. La derivada $\frac{\partial z}{\partial l}$ en el sentido del gradiente tiene el valor máximo igual a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\max}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

En el caso de una función $u = f(x, y, z)$ el gradiente de la función es igual a

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

1242. Hallar la derivada de la función $z = x^2 - y^2$ en el punto $M(1; 1)$ en el sentido del vector **l** que forma un ángulo $\alpha = 60°$ con el sentido positivo del eje Ox.

Resolución. Hallamos los valores de las derivadas parciales en el punto M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-2.$$

Como $\cos\alpha = \cos 60° = 1/2$, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial l}=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}\approx-0,7.$$

1243. Hallar la derivada de la función $u = xy^2z^3$ en el punto $M(3; 2; 1)$ en el sentido del vector $\overline{MN}$, donde $N(5; 4; 2)$.

Resolución. Hallamos el vector $\overline{MN}$ y sus cosenos directores: $\overline{MN}=\mathbf{l}=(5-3)\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}+(2-1)\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$;

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3};\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Calculamos los valores de las derivadas parciales en el punto M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=4;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=12;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=36.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=4\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+36\cdot\frac{1}{3}=22\frac{2}{3}.$$

1244. Hallar la derivada de la función $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto $M(3;\ 4)$ en el sentido del gradiente de la función z.

Resolución. Aquí el vector **l** coincide con el gradiente de la función $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto $M(3;\ 4)$ y es igual a

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{i}+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{j}=\frac{6}{25}\mathbf{i}+\frac{8}{25}\mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{2}{5}.$$

1245. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u=\operatorname{tg} x-x+3\operatorname{sen} y-\operatorname{sen}^3 y+z+\operatorname{ctg} z$ en el punto $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sec^2 x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3\cos y-3\operatorname{sen}^2 y\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=1-\operatorname{cosec}^2 z$$

y calculamos sus valores en el punto $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2-1=1,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=3\cdot\frac{1}{2}-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=1-1=0.$$

Por consiguiente,

$$(\operatorname{grad} u)_M=\mathbf{i}+\frac{3}{8}\mathbf{j};\quad |\operatorname{grad} u|_M=\sqrt{1^2+(3/8)^2}=\sqrt{73}/8;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{73}/8}=\frac{8}{\sqrt{73}};\quad \cos\beta=\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}.$$

1246. Hallar la derivada de la función $z=x^2-xy+y^2$ en el punto $M(1;\ 1)$ en el sentido del vector $\mathbf{l}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

1247. Hallar la derivada de la función $u=\operatorname{arcsen}(z/\sqrt{x^2+y^2})$ en el punto $M(1;\ 1;\ 1)$ en el sentido del vector $\overline{MN}$, donde $N(3;\ 2;\ 3)$.

1248. Hallar la derivada de la función $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ en el punto $M(1;\ 2;\ 1)$ en el sentido del vector $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

1249. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u=1/r$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, en el punto $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1250. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u = xyz$ en el punto M (2; 1; 1).

1251. Hallar la derivada de la función $u = x/2 + y/3 + z/6$ en el sentido $\mathbf{l} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ en un punto arbitrario.

6. Derivación de las funciones implícitas. La derivada de una función implícita $y = y(x)$ definida con ayuda de la ecuación $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ es una función derivable de las variables x e y, puede calcularse por la fórmula

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

a condición de que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Las derivadas de orden superior de una función implícita se pueden hallar por la derivación sucesiva de la fórmula indicada, considerando en este caso y como función de x.

Análogamente, las derivadas parciales de una función implícita de dos variables $z = \varphi(x, y)$ definida con ayuda de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z)$ es una función derivable de las variables x, y, z, pueden calcularse por las fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

a condición de que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

1252. $\cos(x + y) + y = 0$. Hallar y'.

Resolución. Aquí $F(x, y) = \cos(x + y) + y$. Hallamos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x + y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x + y) + 1$. Por lo tanto,

$$y' = -\frac{-\operatorname{sen}(x+y)}{1 - \operatorname{sen}(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1 - \operatorname{sen}(x+y)}.$$

1253. $y - \operatorname{sen} y = x$. Hallar y' e y''.

Resolución. Aquí $F(x, y) = y - \operatorname{sen} y - x$. Tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 1 - \cos y = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{y}{2}$, de donde

$$y' = -\frac{-1}{2 \operatorname{sen}^2 (y/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{2}.$$

Hallamos la derivada segunda:

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{cosec} \frac{y}{2} \left(-\operatorname{cosec} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\, y' = -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^4 \frac{y}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{2}.$$

1254. $z^3 - 3xyz = a^3$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Resolución. Aquí $F(x, y, z)=z^3-3xyz-a^3$. Encontramos $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz$, $\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

1255. $xyz = x + y + z$. Hallar dz.

Resolución. Como es sabido, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, por eso hallamos primeramente $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz-1}{xy-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz-1}{xy-1}.$$

Por consiguiente,

$$dz=-\frac{1}{xy-1}[(yz-1)\,dx+(xz-1)\,dy].$$

1256. $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$. Hallar y'.
1257. $(y/x) + \operatorname{sen}(y/x) = a$. Hallar y'.
1258. $(xy - \alpha)^2 + (xy - \beta)^2 = r^2$. Hallar y', y''.
1259. $x^3+2y^3-2xy\sqrt{2xy}+1=0$. Hallar y'.
1260. $\ln \operatorname{tg}(y/x) - y/x = a$. Hallar y'.
1261. $(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2)$. Hallar y' en el punto $M(b; b)$.
1262. $3\operatorname{sen}(\sqrt{x}/y)-2\cos(\sqrt{x}/y)+1=0$. Hallar y'.
1263. $0{,}5\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}(y/x) = 0$. Hallar y'.
1264. $x^2 - x\cdot 2^{y+1} + 4^y - x + 2^y + 2 = 0$. Hallar y'.
1265. $x + y - e^{x+y} = 0$. Hallar y', y''.
1266. $x+y+z=e^z$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1267. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1268. $x=z\ln(z/y)$. Hallar dz.
1269. $x\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+z\operatorname{sen} x=a$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1270. $xy + xz + yz = 1$. Hallar dz.
1271. $xe^y+ye^x+ze^x=a$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$.
1272. $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$, Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$.

§ 3. Plano tangente y normal a una superficie

Se llama *plano tangente* a una superficie en un punto M al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto M.

Se denomina *normal* a una superficie a la recta que pasa por un punto M y es perpendicular al plano tangente.

Si una superficie está definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $M(x_0; y_0; z_0)$ de la superficie tiene la forma

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0,$$

donde $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ son los valores de las derivadas parciales en el punto M y x, y, z, las coordenadas corrientes del punto del plano tangente.

Las ecuaciones de una normal a una superficie en un punto M se escriben de la forma

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Aquí x, y, z, son las coordenadas corrientes del punto de la normal.

Pero si la ecuación de una superficie está definida de un modo explícito $z = f(x, y)$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $M(x_0; y_0; z_0)$ se escribe de la forma

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-y_0),$$

y las ecuaciones de la normal se escriben de la forma

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1273. Se da la superficie $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Escribir la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la normal a la superficie en el punto $M(1; 1; 1)$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2$ y sus valores en el punto $M(1; 1; 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=-1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=2.$$

La ecuación del plano tangente es la siguiente:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1), \text{ o bien, } x-2y+z=0.$$

La ecuación de la normal es la siguiente:

$$(x-1)/(-1)=(y-1)/2=(z-1)/(-1).$$

1274. Trazar a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ planos tangentes que sean paralelos al plano $x + y + z = 1$.

Resolución. Aquí $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=6z.$$

Debido a la condición de paralelismo del plano tangente y del plano dado resulta que $(\partial F/\partial x)/1 = (\partial F/\partial y)/1 = (\partial F/\partial z)/1$, o bien $(2x)/1 = (4y)/1 = (6z)/1$. Uniendo a estas ecuaciones la ecuación de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$,

encontramos las coordenadas de los puntos de tangencia: M_1 ($\sqrt{6}$; $\sqrt{6}/2$; $\sqrt{6}/3$) y M_2 ($-\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}/2$; $-\sqrt{6}/3$).
Por consiguiente, las ecuaciones de los planos tangentes tienen la forma

$$1\cdot(x\pm\sqrt{6})+1\cdot(y\pm\sqrt{6}/2)+1\cdot(z\pm\sqrt{6}/3)=0,$$

o sea,

$$x+y+z+11/\sqrt{6}=0 \quad \text{y} \quad x+y+z-11/\sqrt{6}=0.$$

1275. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=1+x^2+y^2$ en el punto M (1; 1; 3).

1276. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $x^2+y^2-z^2=-1$ en el punto M (2; 2; 3).

1277. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto M (1; 0; 0).

1278. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=\operatorname{sen} x \cos y$ en el punto M ($\pi/4$; $\pi/4$; $1/2$).

1279. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+2y^2+3z^2=21$ que sean paralelos al plano $x+4y+$ $+6z=0$.

1280. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+$ $+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ truncan sobre los ejes de coordenadas los segmentos cuya suma es constante.

1281. ¿En qué punto del elipsoide $x^2/4+y^2/4+z^2=1$ la normal trazada a éste forma ángulos iguales con los ejes de las coordenadas?

1282. Demostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, si $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie $z=f(x, y)$.

§ 4. Extremo de una función de dos variables independientes

1. Extremo de una función. Una función $z=f(x, y)$ tiene *un máximo* (*mínimo*) en un punto M_0 (x_0; y_0) si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en un otro punto cualquiera M (x, y) de cierto entorno del punto M_0, o sea, $f(x_0, y_0)>f(x, y)$ [respectivamente $f(x_0, y_0)<f(x, y)$] para todos los puntos M (x, y) que satisfacen la condición $|M_0M|<\delta$, donde δ es un número positivo suficientemente pequeño.

El máximo o el mínimo de una función se llama *extremo* de la misma. El punto M_0 en el que la función presenta un extremo se denomina *punto extremo*.

Si una función derivable $z=f(x, y)$ alcanza un extremo en el punto M_0 (x_0, y_0), entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, o sea,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0$$

(*condiciones necesarias* del extremo).

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman *puntos estacionarios*. No todo un punto estacionario es un punto extremo.

Sea $M_0(x_0;\ y_0)$ un punto estacionario de la función $z = f(x,\ y)$. Designamos,

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}$$

y escribimos *el discriminante* $\Delta = AC - B^2$. Entonces:

si $\Delta > 0$, *la función tiene en el punto* M_0 *un extremo, a saber, un máximo cuando* $A < 0$ (*o bien* $C < 0$) *y un mínimo cuando* $A > 0$ (*o bien* $C > 0$);

si $\Delta < 0$, *en el punto* M_0 *no hay extremo* (*condiciones suficientes* de presencia *o* ausencia de un extremo);

si $\Delta = 0$, se requiere una investigación ulterior (caso dudoso).

1283. Hallar el extremo de la función $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Resolución. Determinamos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

Utilizando las condiciones necesarias de un extremo, encontramos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

de donde $x = 0$, $y = 3$; $M(0;\ 3)$.

Hallamos los valores de las derivadas parciales de segundo orden en el punto M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1$$

y escribimos el discriminante

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; \quad A > 0.$$

Por consiguiente, en el punto $M(0;\ 3)$ la función dada presenta un mínimo. El valor de la función en este punto $z_{\min} = -9$.

1284. Hallar el extremo de la función

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Resolución. Encontramos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

Valiéndonos de las condiciones necesarias de un extremo, hallamos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141. \end{cases}$$

De aquí $x = 21$, $y = 20$; el punto estacionario es $M(21,\ 20)$.

Hallamos los valores de las segundas derivadas en el punto M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Entonces

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Como $A < 0$, entonces en el punto M (21, 20) la función tiene un máximo: $z_{max} = 282$.

Hallar los extremos de las funciones:

1285. $z = xy^2(1 - x - y)$. **1286.** $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

1287. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$. **1288.** $z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2+y^2)} - 1)$

1289. $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$.

2. Extremo condicionado. Valores máximo y mínimo de una función en el dominio cerrado. Se llama *extremo condicionado* de una función $z = f(x, y)$ al extremo de esta función alcanzado a condición de que las variables x e y se hallen vinculadas por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ (*ecuación de vinculación*).

La determinación del extremo condicionado puede reducirse a la investigación para determinar el extremo corriente de la llamada *función de Lagrange*

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

donde λ es un multiplicador constante indefinido.

Las condiciones necesarias del extremo de una función de Lagrange tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

A partir de este sistema de tres ecuaciones se pueden hallar las incógnitas x, y y λ.

Para hallar los valores *máximo* y *mínimo* de la función en un dominio cerrado es necesario:

1) determinar los puntos estacionarios alojados en el dominio dado y calcular los valores de la función en estos puntos;

2) determinar los valores máximo y mínimo de la función en las líneas que constituyen la frontera del dominio;

3) entre todos los valores hallados escoger el máximo y el mínimo.

1290. Hallar el extremo de la función $z = xy$ a condición de que x e y se hallan vinculados por la ecuación $2x + 3y - 5 = 0$.

Resolución. Examinemos la función de Lagrange $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Tenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$. A partir del sistema de ecuaciones (condiciones necesarias del extremo)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

determinamos que $\lambda = -5/12$, $x = 5/4$, $y = 5/6$. No es difícil ver que en el punto (5/4; 5/6) la función $z = xy$ alcanza el valor máximo $z_{max} = 25/24$.

1291. Entre todos los triángulos rectángulos, con un área dada S, hallar aquel cuya hipotenusa tenga el valor mínimo.

Resulución. Sean x e y los catetos de un triángulo y z su hipotenusa. Puesto que $z^2 = x^2 + y^2$, el problema se reduce a la determinación del valor mínimo de la función $x^2 + y^2$ a condición de que x e y se hallan vinculados por la ecuación $xy/2 = S$, o sea $xy - 2S = 0$. Examinamos la función $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ y hallamos sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Como $x > 0$, $y > 0$, entonces, a partir del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ xy/2 = S \end{cases}$$

obtenemos la solución $\lambda = -2$, $x = y = \sqrt{2S}$.

De este modo, la hipotenusa tiene el valor mínimo si los catetos del triángulo son iguales entre sí.

1292. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 + y^2$ en el círculo $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$.

Resolución. Aquí se examina el campo D limitado por la circunferencia $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$ incluyendo también los puntos de la circunferencia.

Hallamos los puntos estacionarios de la función dada; tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$; en virtud de las condiciones necesarias del extremo encontramos que $x = 0$, $y = 0$.

No es difícil ver que en el punto (0; 0) la función $z = x^2 + y^2$ tiene el valor mínimo $z_{\min} = 0$, con ello el punto indicado es un punto interior del campo D.

Investigamos la función $z = x^2 + y^2$ para determinar el extremo condicionado si x e y están vinculados por la relación $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$. Examinamos la función

$$u = x^2 + y^2 + \lambda [(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9.$$

Hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2}).$$

Para determinar x, y, λ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ x + \lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $x = y = 5\sqrt{2}/2$, $\lambda = -5/3$ y $z = 25$; $x = y = -\sqrt{2}/2$, $\lambda = -1/3$ y $z = 1$. Pues bien, la función tiene el valor máximo en el punto $(5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2)$.

De suerte que $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 25$.

1293. Hallar el extremo de la función $z = x^2 + y^2$ si x e y están acoplados por la ecuación $x/4 + y/3 = 1$.

1294. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ en un dominio cerrado limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

1295. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = xy + x + y$ en un cuadrado limitado por las rectas $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

1296. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = xy$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1297. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ en un triángulo limitado por las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

1298. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = 1 - x^2 - y^2$ en el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$.

1299. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

1300. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi/2$.

1301. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

1302. Entre todos los triángulos inscritos en un círculo hallar aquel cuya área sea máxima.

1303. Entre todos los triángulos que tienen el perímetro dado hallar aquel cuya área sea máxima.

1304. Entre todos los rectángulos, con el área dada S, hallar aquel, cuyo perímetro tenga el valor mínimo.

1305. Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular que tenga, para la superficie total dada S, el volumen máximo.

Capítulo IX. Integral indefinida

§ 1. Integración inmediata. Cambio de la variable e integración por partes

1. Integración inmediata. Una función $F(x)$ se llama *primitiva* para la función $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ o $dF(x) = f(x)\,dx$.

Si la función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$, ella tiene un conjunto infinito de primitivas, con ello todas las primitivas se contienen en la expresión $F(x) + C$, donde C es una constante.

Se denomina *integral indefinida* de la función $f(x)$ (o de la expresión $f(x)\,dx$) al conjunto de todas sus primitivas. La anotación es la siguiente:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Aquí $\int$ es el signo de la integral; $f(x)$, la función integrando; $f(x)\,dx$, la expresión integrando; x, la variable de integración.

La determinación de la integral indefinida ha recibido el nombre de *integración* de una función.

Propiedades de una integral indefinida (reglas de integración)

1ª. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2ª. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3ª. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4ª. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, donde a es una constante.

5ª. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6ª. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ y $u = \varphi(x)$, entonces $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Tabla de integrales inmediatas

I.	$\int dx = x + C.$	VIII.	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$
II.	$\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ para $m \neq -1.$	IX.	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$
III.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C.$	X.	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$
IV.	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$	XI.	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$
V.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$	XII.	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$
VI.	$\int e^x\,dx = e^x + C.$	XIII.	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$
VII.	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$	XIV.	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
		XV.	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

1306. Hallar la integral $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx.$

Resolución. Utilizando las propiedades 4ª y 5ª, obtenemos

$$\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx = 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 3\int dx.$$

Aplicamos la fórmula II a las primeras tres integrales del segundo miembro y la fórmula I a la cuarta integral:

$$\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

1307. Hallar la integral $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \cdot dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) dx =$$

$$= \int (x + 2x^{1/6} + x^{-2/3})\,dx = \int x\,dx + 2\int x^{1/6}\,dx + \int x^{-2/3}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6} + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

1308. Hallar la integral $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx = \int (2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x\,dx = \int 2250^x\,dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C.$$

La propiedad 6ª permite ampliar considerablemente la tabla de integrales inmediatas con ayuda de un procedimiento consistente en *colocar la función bajo el signo de diferencial.*

1309. Hallar la integral $(1+x^2)^{1/2}x\,dx$.

Resolución. Esta integral puede reducirse a la fórmula II, transformándo la integral de modo siguiente:

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\,d\,(1+x^2).$$

Ahora en calidad de variable de integración tenemos la expresión $1+x^2$ y con respecto a esta variable se obtiene la integral de una función potencial. Por consiguiente,

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C.$$

1310. Hallar la integral $\int (x^2-3x+1)^{10}\cdot(2x-3)\,dx$.

Resolución. Aquí, procediendo al igual que en el ejercicio precedente, tenemos

$$\int (x^2-3x+1)^{10}\,d\,(x^2-3x+1)=\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C.$$

1311. Hallar la integral $\int (\ln t)^4\,\frac{dt}{t}$.

Resolución. La expresión $\frac{dt}{t}$ se puede escribir como $d\,(\ln t)$, por eso

$$\int (\ln t)^4\,d\,(\ln t)=\frac{1}{5}(\ln t)^5+C.$$

1312. Hallar la integral $\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución. La integral dada puede representarse así:

$$\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot 3\operatorname{sen} x\,dx,$$

pero $3\operatorname{sen} x\,dx=-d\,(3\cos x)$ y por eso

$$\int e^{3\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot d\,(3\cos x),$$

o sea, la variable de integración es $3\cos x$. Por lo tanto, la integral se toma por la fórmula VI:

$$\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C.$$

1313. Hallar la integral $\int (2\operatorname{sen} x+3\cos x)\,dx$.

Resolución. Encontramos

$$\int (2\operatorname{sen} x+3\cos x)\,dx=2\int \operatorname{sen} x\,dx+3\int \cos x\,dx=-2\cos x+3\operatorname{sen} x+C$$

(véanse las fórmulas VIII y IX).

1314. Hallar la integral $\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx=\int (\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx=$$

$$=\int (\operatorname{tg}^2 x+1+1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx=\int (\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx+\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx=$$

$$=\int \sec^2 x\,dx+\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$$

(véanse las fórmulas X y XI).

Hallar las integrales:

1315. $\int x\sqrt{x}\,dx.$ **1316.** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}.$ **1317.** $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

1318. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\,dx.$ **1319.** $\int e^{3x}\cdot 3^x\,dx.$ **1320.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1321. $\int (\operatorname{sh} x-\operatorname{sen} x)\,dx.$ **1322.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$

1323. $\int (2\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x)^2\,dx.$ **1324.** $\int x\cos(x^2)\,dx.$

1325. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ **1326.** $\int (ax^2+b)^{1/3}\cdot x\,dx.$

1327. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx.$ **1328.** $\int \operatorname{sen}(a+bx)\,dx.$

1329. $\int \cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x\,dx.$

2. Cambio de la variable en una integral indefinida. *El cambio de la variable en una integral indefinida* se efectúa con ayuda de *sustituciones* de dos tipos:

1) $x=\varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función monótona continuamente derivable de una variable nueva t. La fórmula de cambio de la variable es en este caso la siguiente:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

2) $u=\psi(x)$, donde u es una variable nueva. Con tal sustitución la *fórmula de cambio de la variable es la siguiente*:

$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\,dx=\int f(u)\,du.$$

1330. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

Resolución. Efectuamos la sustitución $t=\sqrt[3]{x}$, o sea $x=t^3$. Esta sustitución llevará a que bajo el signo de seno resulte la variable de integración en vez de la raíz de la misma. Determinemos la diferencial $dx=3t^2\,dt$. De ello obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int \frac{3t^2\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt=3\int \operatorname{sen} t\,dt=-3\cos t+C.$$

La respuesta debe expresarse por la vieja variable x. Sustituyendo como resultado de integración $t=\sqrt[3]{x}$, obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

1331. Hallar la integral $\int (2x+1)^{20}\,dx$.

Resolución. Esta integral se puede hallar sin efectuar el cambio de la variable. Aquí basta desarrollar la expresión $(2x+1)^{20}$ por la fórmula del binomio de Newton y aplicar la integración término a término. Sin embargo, este procedimiento está vinculado con gran cantidad de cálculos. Con ayuda del cambio de la variable se puede reducir directamente la integral dada a una inmediata.

Suponiendo $2x+1=t$, tenemos $2dx=dt$, o sea, $dx=(1/2)\,dt$. De aquí obtenemos

$$\int (2x+1)^{20}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{20}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21}+C=\frac{1}{42}(2x+1)^{21}+C.$$

En general, si la integral $\int f(x)\,dx$ se halla tabulada (como inmediata) entonces la integral $\int f(ax+b)\,dx$ se puede determinar fácilmente con ayuda de la sustitución $ax+b=t$.

Por ejemplo, aplicando esta sustitución a la integral $\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx$, tenemos $ax+b=t$, $a\,dx=dt$ y $dx=(1/a)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx=\int \operatorname{sen} t\cdot\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int \operatorname{sen} t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C.$$

Retornando a la vieja variable, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

Análogamente se puede demostrar que

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C,\qquad \int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+C,$$

etc.

Al determinar la integral $\int f(ax+b)\,dx$ se puede omitir la anotación de la misma sustitución $ax+b=t$. Aquí basta tomar en consideración que $dx=\frac{1}{a}\,d(ax+b)$. De este modo,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

donde F es la primitiva para f.

1332. Hallar la integral $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$.

Resolución. Hacemos $\sqrt{x^3+5}=t$; entonces $x^3+5=t^2$. Derivamos ambos miembros de la igualdad: $3x^2\,dx=2t\,dt$. De aquí $x^2\,dx=(2/3)\,t\,dt$ y, por consiguiente,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx=\int \sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx=\int t\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int t^2\,dt=$$

$$=\frac{2}{9}t^3+C=\frac{2}{9}(\sqrt{x^3+5})^3+C=\frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C.$$

La integral dada puede determinarse también con ayuda de la sustitución $x^3+5=t$.

Esta sustitución reduce directamente la integral a la forma inmediata, puesto que el primer factor de la expresión integrando x^2 se distingue de la derivada de la expresión radicando x^3+5 sólo por el factor constante 1/3, o sea, $x^2=(1/3)(x^3+5)'$.

En general, si una función integrando es el producto de dos factores uno de los cuales depende de cierta función $\psi(x)$ y el otro es la derivada de $\psi(x)$ (con precisión hasta el factor constante), entonces es conveniente efectuar el cambio de la variable por la fórmula $\psi(x)=t$.

1333. Hallar la integral $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx$.

Resolución. Escribamos la integral dada en la forma $\int (2\ln x+3)^3 \frac{1}{x}dx$. Como la derivada de la expresión $2\ln x+3$ es igual a $2/x$ y el segundo factor $1/x$ no se distingue de esta variable sino que por el coeficiente constante 2, hace falta efectuar la sustitución $2\ln x+3=t$. Entonces $2\cdot\frac{dx}{x}=dt$, $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\,dt$. Por consiguiente,

$$\int (2\ln x+3)^3\cdot\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{8}t^4+C=$$
$$=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

1334. Hallar la integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

Resolución. Efectuemos la sustitución $f(x)=t$. Entonces $f'(x)\,dx=dt$ y

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

Por ejemplo,

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Aquí no escribimos el signo de módulo, ya que $x^2+1>0$.

1335. Hallar la integral $\int\frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f/x}}$.

Resolución. Hacemos $f(x)=t$. Entonces $f'(x)\,dx=dt$ y

$$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-1/2}\,dt=\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{f(x)}+C.$$

Notemos que la integral dada se podría hallar con ayuda de la sustitución $\sqrt{f(x)}=t$.

1336. Hallar la integral $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ si $a\neq 0$.

Resolución. Para reducir la integral a una inmediata (véase la fórmula IV) dividimos el numerador y el denominador de la expresión integrando por a^2:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{(dx)/a^2}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}.$$

Hemos colocado el factor constante $1/a$ bajo el signo de diferencial. Examinando x/a como nueva variable, obtendremos

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Habríamos llegado al mismo resultado también con ayuda de la sustitución $x=at$.

1337. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ si $a>0$.

Resolución. Dividiendo el numerador y el denominador por a, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{(dx)/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}.$$

Tomando x/a como nueva variable, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

Completemos ahora la tabla de integrales inmediatas con las fórmulas siguientes:

XVI. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C.$

XVII. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx=2\sqrt{f(x)}+C.$

XVIII. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

XIX. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

XX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}=\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|+C.$

XXII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x|+C.$

XXIII. $\int \frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C.$

XXIV. $\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln|\cos x|+C.$

XXV. $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\ln|\operatorname{sen} x|+C.$

Las fórmulas I—XXV hay que aprenderlas de memoria, ya que la mayoría de las integrales que se utilizan en la práctica se reducen a las mismas.

1338. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $\sqrt{2x-9}=t$; entonces $2x-9=t^2$, $x=(t^2+9)/2$ y $dx=t\,dt$. De suerte que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\int \frac{t\,dt}{\frac{t^2+9}{2}\cdot t}=2\cdot\int \frac{dt}{t^2+9}.$$

Aplicando la fórmula XVIII, obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C.$$

1339. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $\cos^2 x=t$; entonces $-2\cos x\operatorname{sen} x\times$ $\times x\,dx=dt$, o sea, $\operatorname{sen} 2x\,dx=-dt$. Ahora hallamos

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}\,dx=-\int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}=-\operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=-\operatorname{arcsen}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C$$

(hemos utilizado la fórmula XX).

1340. Hallar la integral $\int \left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $2\operatorname{sen}(x/2)+3=t$; entonces $\cos(x/2)\,dx=dt$ y

$$\int \left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^3+C.$$

1341. Hallar la integral $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $x^5=t$; entonces $5x^4\,dx=dt$, $x^4\,dx=$ $=(1/5)\,dt$ y

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{5}\ln|t+\sqrt{t^2-2}|+C$$

(véase la fórmula XXI). De suerte que

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\ln|x^5+\sqrt{x^{10}-2}|+C.$$

1342. Hallar la integral $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

Resolución. Transformando el denominador de la fracción, obtenemos $x^4+2x^2+5=(x^2+1)^2+4$. Efectuamos la sustitución $x^2+1=t$; entonces $x\,dx=(1/2)\,dt$. De aquí,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C$$

(véase la fórmula XVIII). De este modo,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C.$$

1343. Hallar la integral $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx$.

Resolución. Hacemos $e^{2x}=t$, entonces $e^{2x}\,dx=(1/2)\,dt$ y

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C$$

(hemos aplicado la fórmula XIX).

Pues bien

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C.$$

1344. Hallar la integral $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}$.

Resolución. Efectuando la misma sustitución que en el ejercicio precedente, obtenemos

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.$$

1345. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{x\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx$.

Resolución. Haciendo $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, obtendremos

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{(\operatorname{sen}t+\cos t)\cdot 2t}{t\operatorname{sen}2t}\,dt=\int \frac{\operatorname{sen}t+\cos t}{\operatorname{sen}t\cdot\cos t}\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\operatorname{sen}t}\right)dt=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C$$

(véanse las fórmulas XXII y XXIII).

Retornando a la vieja variable, obtendremos

$$\int \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C.$$

Hallar las integrales:

1346. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\,dx$. **1347.** $\int x^3(1-2x^4)^3\,dx$.

1348. $\int \operatorname{sen}(2-3x)\,dx$. **1349.** $\int x\operatorname{ch}(5x^2+3)\,dx$.

1350. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. **1351.** $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx$.

1352. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$. **1353.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

1354. $\int \frac{\operatorname{sen}4x\,dx}{\cos^4 2x+4}$. **1355.** $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$.

1356. $\int \frac{e^{x/2}\,dx}{\sqrt{16-e^x}}$. **1357.** $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$.

Indicación: representar la integral en la forma de una suma de integrales.

1358. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-3x^3}}$. **1359.** $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$.

1360. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$. **1361.** $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}\,dx$. **1362.** $\int \frac{x\,dx}{2x^4+5}$.

3. Integración por partes. Se llama *integración por partes* a la determinación de la integral por la fórmula

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

donde $u = \varphi(x)$, $u = \psi(x)$ son funciones de x, continuamente derivables. Con ayuda de esta fórmula la obtención de la integral $\int u\,dv$ se reduce a la determinación de otra integral $\int v\,du$; su empleo es racional en los casos en que la última integral es más sencilla de la inicial o bien es semejante a ella.

En este caso por u se toma tal función que, al derivarla, se simplifica y por dv se toma aquella parte de la expresión integrando cuya integral se conoce o puede ser hallada.

Así, por ejemplo, para las integrales del tipo $\int P(x)\,e^{ax}dx$, $\int P(x)\times$ $\times \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, donde $P(x)$ es el polinomio, como u se debe tomar $P(x)$ y como dv las expresiones $e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, $\cos ax\,dx$, respectivamente; para las integrales del tipo $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcsen} x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$ como u se toman las funciones $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, respectivamente, y como dv se toma la expresión $P(x)\,dx$.

1363. Hallar la integral $\int \ln x\,dx$.

Resolución. Hacemos $u = \ln x$, $dv = dx$; entonces $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$. Utilizando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$
$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

1364. Hallar la integral $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Resolución. Sea $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; entonces $du = \frac{\partial x}{1+x^2}$, $v = x$. Con ayuda de la formula de integración por partes hallamos

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1365. Hallar la integral $\int x\operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución. Hacemos $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$; entonces $du = dx$, $v = -\cos x$. De aquí

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Si hubiésemos escogido las expresiones u y dv de otro modo, por ejemplo, $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\,dx$, habríamos obtenido $du = \cos x\,dx$, $v = (1/2)\,x^2$, de donde

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} x - \int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx,$$

y habríamos llegado a una integral más compleja que la inicial, ya que el grado de la potencia del factor adjunto a la función trigonométrica habría sido elevado en una unidad.

1366. Hallar la integral $\int x^2 e^x\,dx$.

Resolución. Hacemos $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$; entonces $du = 2x\,dx$, $v = e^x$. Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

Hemos logrado la disminución del grado de la potencia de x en una unidad. Para hallar $\int x e^x\,dx$, aplicamos una vez más la integración por partes. Hacemos $u = x$, $dv = e^x\,dx$; entonces $du = dx$, $u = e^x$ y

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x\,dx\right) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

1367. Hallar la integral $I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución. Sean $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$; entonces $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$. Por consiguiente,

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Pareciera que la integración por partes no ha logrado su objetivo, ya que la integral no se ha simplificado. No obstante, probemos integrar por partes una vez más. Haciendo $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$, de donde $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$I = -e^x \cos x + (e^x \operatorname{sen} x - I), \text{ o sea,}$$

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I.$$

Habiendo efectuado dos veces la operación de integración por partes, hemos obtenido otra vez la integral inicial en el segundo miembro. Ahora bien, llegamos a la ecuación con la integral desconocida I. A partir de esta ecuación encontramos

$$2I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x, \text{ o sea, } I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

En el resultado final hemos añadido la constante arbitraria a la función primitiva hallada.

1368. 1) Hallar la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ si $a > 0$.

Resolución. Hacemos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, de donde $du = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Por consiguiente,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx,$$

o bien

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$$

De ello obtenemos

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

o sea,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

2) Hallar la integral $\int \sqrt{x^2+\lambda}\,dx$.

1369. Deducir la fórmula recurrente para la integral $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Resolución. La integral dada se puede transformar así:

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Hacemos $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$; entonces $du=dx$,

$$v=\frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n}\cdot d\,(x^2+a^2)=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

de donde

$$I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right],$$

o bien

$$I_n=\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1},$$

o sea,

$$I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Haciendo $n=2$, obtenemos la expresión de la integral I_2 por medio de funciones elementales. Haciendo ahora $n=3$, hallamos la integral I_3 (puesto que la integral I_2 ya se ha encontrado). De este modo, se puede hallar I_n para un n positivo entero cualquiera.

Hallar las integrales:

1370. $\int x\ln x\,dx$. **1371.** $\int \arcsin x\,dx$.

1372. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **1373.** $\int (x+1)\,e^x\,dx$.

1374. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$. **1375.** $\int x^5e^{x^2}\,dx$.

Indicación: hacer $x^2=t$.

1376. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$.

1377. $\int e^{2x}\cos x\,dx$. **1378.** $\int \operatorname{sen}\ln x\,dx$.

1379. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$.

Indicación: hacer $\sqrt{x}=t$.

§ 2. Integración de fracciones racionales

1. Integración de fracciones elementales. Se llama *fracción racional* a la del tipo $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Una fracción racional se denomina *propia* si el grado del polinomio $P(x)$ es inferior al grado del polinomio $Q(x)$; en el caso contrario la fracción se llama *impropia*.

Han recibido el nombre de fracciones *elementales* las fracciones propias del tipo siguiente:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, donde m es un número entero mayor que la unidad;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, donde $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, o sea, el trinomio de segundo grado x^2+px+q no tiene raíces reales;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, donde n es un número entero mayor que la unidad y el trinomio de segundo grado x^2+px+q no tiene raíces reales.

En los cuatro casos se supone que A, B, p, q, a son números reales. Las fracciones enumeradas las llamaremos fracciones simples de los tipos I, II, III y IV, respectivamente.

Examinemos las integrales de fracciones elementales de los primeros tres tipos. Tenemos

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C;$$

$$\text{II. } \int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C;$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

En efecto, para este caso particular de una fracción elemental del tipo III obtenemos

$$x^2+px+q\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \quad \text{o bien} \quad x^2+px+q=t^2+a^2,$$

donde $t=x+\dfrac{p}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ $\left(\text{aquí } \dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$, de donde

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1380. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

1381. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5/2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{5}+C.$$

Mostraremos cómo se integran, en forma general, las fracciones elementales del tipo III.

Se necesita hallar $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx,\ \frac{p^2}{4}-q<0.$

Separamos en el numerador de la fracción la derivada del denominador. Para esto representemos el numerador en la forma

$$Ax+B=(2x+p)\cdot\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B.$$

Entonces

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

En la primera integral el numerador es la derivada del denominador; por eso

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\ln(x^2+px+p)+C,$$

como $x^2+px+q>0$ para un valor cualquiera de x. La segunda integral, como ya hemos señalado, se determina por la fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Y bien,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1382. Hallar la integral $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx+$$

$$+5\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

1383. Hallar la integral $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{3/2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$$

1384. Hallar la integral $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}\,dx$.

Resolución. En esta integral efectuemos previamente el cambio de la variable $x^2=t$, entonces $2x\,dx=dt$, $x\,dx=(1/2)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x^2+3)x\,dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+3)\,dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt+\int \frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Examinemos ahora el caso particular de la integral de una fracción elemental del tipo IV.

Para la integral $I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n es un número positivo entero) tiene lugar la siguiente fórmula recurrente:

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Esta fórmula permite, después de aplicada $(n-1)$ veces, reducir la integral dada I_n a la inmediata $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

1385. Hallar la integral $I_3=\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Resolución. Aquí $n = 3$. Después de la primera aplicación de la fórmula recurrente obtenemos

$$I_3 = \frac{1}{2\cdot(3-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_{3-1} - \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2.$$

Aplicamos otra vez a la integral $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ la fórmula recurrente (aquí hacemos $n=2$):

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} I_{2-1} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} +$$
$$+ \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Y bien,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right] + C.$$

Finalmente tenemos

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C.$$

Vamos a mostrar ahora, en forma general, como se integran las fracciones elementales del tipo IV.

Se necesita encontrar $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Separemos en el numerador la derivada del trinomio de segundo grado que está en el denominador:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

La primera integral del segundo miembro de la igualdad se determina fácilmente con ayuda de la sustitución $x^2+px+q=t$ y la segunda la transformamos así:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Haciendo ahora $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$ y designando $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

De este modo, la integración de una fracción elemental del tipo IV puede efectuarse con ayuda de la fórmula recurrente.

1386. Hallar la integral $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=$$
$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx-\int \frac{dx}{[(x+1)^2+9)]^2}.$$

Efectuamos en la primera integral el reemplazo $x^2+2x+10=z$, $(2x+2)\,dx=dz$ y que en la segunda integral hacemos $x+1=t$, $dx=dt$. De aquí

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2}-\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$
$$=\frac{3}{2}\int z^{-2}\,dz-\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}=-\frac{3}{2}z^{-1}-$$
$$-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot 9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot\int \frac{dt}{t^2+9}\right]=$$
$$=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C.$$

Retornando a la vieja variable, obtenemos

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+9}-$$
$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-$$
$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Hallar las integrales:

1387. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$. **1388.** $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$. **1389.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

1390. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+2x^3+3}$. **1391.** $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$.

1392. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}\,dx$. **1393.** $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.

1394. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$. **1395.** $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$.

2. Integración de fracciones racionales con ayuda del desarrollo en fracciones simples. Antes de proceder a la integración de una fracción racional $P(x)/Q(x)$ es necesario efectuar las transformaciones algebraicas y cálculos siguientes:

1) si se da una fracción racional impropia, separar de ella la parte entera, o sea, representarla en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

donde $M(x)$ es un polinomio y $P_1(x)/Q(x)$, una fracción racional propia;

2) descomponer el denominador de la fracción en factores lineales y cuadráticos:

$$Q(x)=(x-a)^m\ \ldots\ (x^2+px+q)^n\ \ldots,$$

donde $\frac{p^2}{4}-q<0$, o sea, el trinomio x^2+px+q tiene raíces conjugadas complejas;

3) desarrollar la fracción racional propia en fracciones simples:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\ldots;$$

4) calcular los coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$, para lo cual se debe reducir la última igualdad a un denominador común, agrupar los coeficientes adjuntos de iguales potencias de x en los miembros izquierdo y derecho de la identidad obtenida y resolver *el sistema de ecuaciones lineales respecto a los coeficientes buscados*. Los coeficientes pueden determinarse también por otro procedimiento, atribuyendo en la identidad obtenida valores numéricos arbitrarios a la variable x. Frecuentemente es útil combinar ambos métodos de cálculo de los coeficientes.

Como resultado, la integración de una fracción racional se reducirá a la determinación de las integrales del polinomio y de las fracciones racionales simples.

Caso 1. El denominador tiene sólo raíces reales diferentes o sea, se descompone en factores de primer grado que no se repiten.

1396. Hallar la integral $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx$.

Resolución. Como cada uno de los binomios $x-1$, $x-2$, $x-4$ forma parte del denominador en el primer grado, la fracción racional propia dada puede representarse como una suma de fracciones simples del tipo I:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Eliminando los denominadores, obtendremos

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2).(*)$$

Por lo tanto,

$$x^2+2x+6=A(x^2-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2).$$

Agrupamos los términos con exponentes iguales:

$$x^2+2x+6=(A+B+C)x^2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C).$$

Comparando los coeficientes de las potencias iguales de x, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} A+B+C&=1,\\ -6A-5B-3C&=2,\\ 8A+4B+2C&=6,\end{aligned}\right.$$

del cual hallamos $A=3$, $B=-7$, $C=5$.

De suerte que el desarrollo de la fracción racional en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}.$$

Las incógnitas A, B, C en el desarrollo pudieron determinarse también de otro modo. Después de eliminado el denominador, se puede asignar a x tantos valores particulares como incógnitas se contienen en la ecuación, en el caso dado, tres valores particulares.

Es sobre todo cómodo atribuir a x valores que son las raíces reales del denominador. Utilicemos este procedimiento para resolver el problema dado. Una vez eliminado el denominador obtenemos la igualdad (*). Las raíces reales del denominador son los números 1, 2 y 4. Supongamos que en esta igualdad $x = 1$, entonces

$$1^2 + 2\cdot 1 + 6 = A\,(1-2)\,(1-4) + B\,(1-1)\,(1-4) + C\,(1-1)\,(1-2),$$

de donde $9 = 3A$, o sea $A = 3$. Haciendo $x = 2$, obtenemos $14 = -2B$, o sea, $B = -7$; haciendo $x = 4$, tenemos $30 = 6C$, o sea, $C = 5$. Como resultado hemos obtenido los mismos valores que con el primer método de determinación de las incógnitas.

De este modo,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)\,(x-2)\,(x-4)}\,dx = 3\int\frac{dx}{x-1} - 7\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x-4} =$$

$$= 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3\,(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$

Caso 2. El denominador tiene sólo raíces reales, además, algunas de ellas son múltiples, o sea, el denominador se descompone en factores de primer grado y algunos de ellos se repiten.

1397. Hallar la integral $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3\,(x+3)}\,dx$.

Resolución. Al factor $(x-1)^3$ le corresponde la suma de tres fracciones simples $\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$ y al factor $x+3$ le corresponde la fracción simple $\frac{D}{x+3}$. Así,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\,(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Eliminemos el denominador:

$$x^2 + 1 = A\,(x+3) + B\,(x-1)\,(x+3) + C\,(x-1)^2\,(x+3) + D\,(x-1)^3.$$

Las raíces reales del denominador son los números 1 y -3. Haciendo $x = 1$, obtenemos $2 = 4A$, o sea, $A = 1/2$. Cuando $x = -3$ tenemos $10 = -64D$, o sea, $D = -5/32$.

Comparemos ahora los coeficientes adjuntos a la potencia superior de x, o sea, los de x^3. En el primer miembro no hay ningún término con x^3, o sea, el coeficiente de x^3 es igual a 0. En el segundo miembro el coeficiente de x^3 es igual a $C + D$. De suerte que $C + D = 0$, de donde $C = 5/32$.

Queda por determinar el coeficiente B. Para esto se necesita tener una ecuación más. Esta ecuación se puede obtener comparando los coeficientes de potencias iguales de x (por ejemplo, los de x^2) o bien atribuyendo a x un valor numérico cualquiera. Es más cómodo tomar un valor tal con el cual sea preciso efectuar el menor número posible de cálculos. Haciendo, por ejemplo, $x = 0$, obtenemos

$$1 = 3A - 3B + 3C - D, \quad \text{o bien,} \quad 1 = \frac{3}{2} - 3B + \frac{15}{32} + \frac{5}{32}, \quad \text{o sea,} \quad B = \frac{3}{8}.$$

El desarrollo final de la fracción dada en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\,(x+3)} = \frac{1}{2\,(x-1)^3} + \frac{3}{8\,(x-1)^2} + \frac{5}{32\,(x-1)} - \frac{5}{32\,(x+3)}.$$

De este modo, obtenemos

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1}-$$

$$-\frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{4(x-1)^3}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

Caso 3. Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, o sea, la descomposición del denominador contiene multiplicadores cuadráticos que no se repiten.

1398. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$.

Resolución. Descomponemos el denominador en factores:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Entonces

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Eliminemos el denominador:

$$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

Las raíces reales del denominador son los números 0 y 1.
Cuando $x=0$ tenemos $1=-A$, o sea, $A=-1$.
Cuando $x=1$ tenemos $1=3C$, o sea, $C=1/3$.
Escribimos la igualdad precedente en la forma

$$1=A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

Comparando los coeficientes de x^4, x^3, x^2, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

del cual hallamos: $B=0$, $D=-1/3$, $E=1/3$. De suerte que

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2}=-\int \frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Caso 4. **Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiples, o sea, la descomposición del denominador contiene multiplicadores cuadráticos que se repiten.**

1399. Hallar la integral $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Resolución. Puesto que x^2+1 es un factor doble, entonces

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Eliminando los denominadores, obtenemos

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=C, \\ x^2 & 0=D, \\ x & -2=A+C;\ A=-3, \\ x^0 & 0=B+D;\ B=0. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{-3x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Notemos que la integral dada podía determinarse más sencillamente con ayuda de la sustitución $x^2+1=t$.

1400. Hallar la integral $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx$.

Resolución. Separemos la parte entera de la fracción racional impropia dada:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \hline -\ x^3 \qquad\ +2x & x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2} \\ \hline 3x^2+3x+7 & \\ -\ 3x^2 \qquad\ +6 & \\ \hline 3x+1. & \end{array}$$

Así,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

De aquí hallamos

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx=\int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx=$$

$$=\int x\,dx+3\int dx+\int \frac{3x+1}{x^2+2}\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1401. Hallar la integral $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx$.

Resolución. Puesto que la función integrando es una fracción propia, conviene representarla en forma de la suma de fracciones simples. Es fácil ver que el polinomio $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ se anula cuando $x = -1$, por eso este polinomio se divide exactamente por $x + 1$.

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3+\ x^2} \qquad\qquad & x^2+5x+6 \\ 5x^2+11x \qquad & \\ -\underline{5x^2+\ 5x} \qquad & \\ 6x+6 & \\ -\underline{6x+6} & \end{array}$$

Por consiguiente,

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3),$$

$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}.$$

Eliminando los denominadores, obtendremos

$$x+4=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2).$$

Haciendo $x = -1$, hallamos $3 = 2A$, o sea, $A = 3/2$. Si $x = -2$, entonces obtenemos $2 = -B$, o sea, $B = -2$, Cuando $x = -3$, resulta $1 = 2C$, o sea, $C = 1/2$.

Pues bien,

$$\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C.$$

1402. Hallar la integral $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Resolución. Es necesario, ante todo, separar la parte entera:

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 \qquad\qquad & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-8x^3+16x} & x+\dfrac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} \\ 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Por consiguiente,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Descomponemos la fracción propia en fracciones simples:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Eliminamos los denominadores:

$$8x^3-16x+1=A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+$$
$$+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2).$$

Haciendo $x = 2$, encontramos $33 = 16A$, o sea, $A = 33/16$.
Para $x = -2$ obtenemos $-31 = 16C$, o sea, $C = -31/16$.
Si $x = 0$, entonces $1 = 4A - 8B + 4C + 8D$.
Reemplazando A y C por sus valores, obtenemos

$$1=\frac{33}{4}-8B-\frac{31}{4}+8D, \text{ o sea, } -16B+16D=1.$$

Para hallar B y D escribamos una ecuación más. Comparando los coeficientes de x^3, obtenemos $8 = B + D$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B+\ \ D=8, \\ -16B+16D=1 \end{cases}$$

hallamos $D = 129/32$, $B = 127/32$.

De suerte que

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx=\int \left[x+\frac{33/16}{(x-2)^2}+\frac{127/32}{x-2}-\frac{31/16}{(x+2)^2}+\frac{129/32}{x+2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16\,(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16\,(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C.$$

1403. Hallar la integral $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}$.

Resolución. La función integrando es una fracción racional propia y se podría hallar la integral representando esta fracción en forma de la suma de fracciones simples. Sin embargo, la determinación de la integral puede ser simplificada considerablemente si se efectúa el cambio de la variable $x - 1 = t$; entonces $x = t + 1$ y $dx = dt$. Como resultado obtenemos

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}=\int \frac{(t+1)^2\cdot dt}{t^5}=\int \frac{t^2+2t+1}{t^5}\,dt=\int \frac{dt}{t^3}+2\int \frac{dt}{t^4}+\int \frac{dt}{t^5}=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{2\,(x-1)^2}-\frac{2}{3\,(x-1)^3}-$$

$$-\frac{1}{4\,(x-1)^4}+C=-\frac{6x^2-4x+1}{12\,(x-1)^4}+C.$$

1404. Hallar la integral $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$.

Resolución. Transformamos el denominador: $x^4 + 6x^2 + 5 = (x^2 + 3)^2 - 4$. Ahora tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}=\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}.$$

Efectuamos el cambio $x^2+3=t$, entonces $2x\,dx=dt$ y

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}=\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C.$$

Los dos últimos problemas muestran que antes de proceder a la integración de una fracción racional conviene, a veces, efectuar el cambio de la variable.

Hallar las integrales:

1405. $\int \frac{x+2}{x\,(x-3)}\,dx$. **1406.** $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)\,(x^2+x+1)}\,dx$.

1407. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3\,(x-2)}\,dx$. **1408.** $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

1409. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$. **1410.** $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

1411. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x^2+9)}\,dx$. **1412.** $\int \frac{(19/16)\,x^2+x+1}{(x^2+4)\,(x^2+2x+5)}\,dx$.

1413. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$. **1414.** $\frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

Indicación: representar el denominador en la forma $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.

1415. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx$. **1416.** $\int \frac{x^4}{x^4-16}\,dx$.

1417. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$.

§ 3. Integración de funciones irracionales elementales

1. Integrales del tipo $\int R\left(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots\right) dx$, **donde R es una función racional; $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ son números enteros.** Con ayuda de la sustitución $ax + b = t^s$, donde s *el mínimo común múltiplo* de los números $n_1, n_2, \ldots$, la integral indicada se transforma en integral de la función racional.

1418. Hallar la integral $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$.

Resolución. Aquí $n_1 = 3$, $n_2 = 2$; por eso $s = 6$. Aplicamos la sustitución $2x + 1 = t^6$, entonces $x = (t^6 - 1)/2$, $dx = 3t^5\,dt$ y, por consiguiente.

$$I = \int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt =$$
$$= 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C.$$

Retornamos a la vieja variable. Puesto que $t = (2x+1)^{1/6}$, entonces

$$I = \frac{3}{2}(2x+1)^{1/3} + 3(2x+1)^{1/6} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1} - 1\right| + C.$$

2. **Integral del tipo** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Tales integrales por medio de la separación del cuadrado perfecto a partir de un trinomio de segundo grado se reducen a las integrales inmediatas XX ó XXI.

1419. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Resolución. Transformemos el trinomio de segundo grado en forma de $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

1420. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-2/3}{1/3} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2) + C.$$

3. **Integrales del tipo** $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Para hallar esta integral separamos en el numerador la derivada del trinomio de segundo grado que está bajo el signo de la raíz y representamos la integral como suma de dos integrales:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{d\,(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

La primera de las integrales obtenidas es la integral inmediata XVII y la segunda se examina en el punto 2.

1421. Hallar la integral $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

Resolución. Separamos en el numerador la derivada de l aexpresión radicando:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx-13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

1422. Hallar la integral $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx=\int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx+13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$

$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsen(x-3)+C.$$

4. **Integrales del tipo** $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Con ayuda de la sustitución $x-\alpha=1/t$ esta integral se reduce a la examinada en el punto 2.

1423. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Resolución. Hacemos $x = 1/t$, entonces $dx = -(1/t^2)\,dt$ y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{(dt)/t^2}{(1/t)\sqrt{5/t^2-2/t+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = -\ln|\,t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\,| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right| + C = -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C.$$

1424. Hallar la integral $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Resolución. Haciendo $x-1 = 1/t$, obtenemos $x = 1/t+1$ y $dx = -(1/t^2)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = -\int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + C.$$

1425. Hallar la integral $I = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$.

Resolución. Escribiendo el numerador de la función integrando en la forma $3x+2 = 3(x+1)-1$, obtenemos

$$I = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx.$$

Representamos la integral dada como diferencia de dos integrales:

$$I = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

Aplicamos a la primera integral la fórmula XXI y a la segunda, la sustitución $x+1 = 1/t$:

$$I = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} =$$

$$= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\right|+C.$$

5. Integrales del tipo $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$**, donde** $P_n(x)$ **es un polinomio de grado** n**.** La integral de este tipo se encuentra con ayuda de la identidad

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$ con coeficientes indeterminados; λ es un número.

Derivando la identidad indicada y reduciendo el resultado al denominador común, obtendremos la igualdad de dos polinomios a partir de la cual pueden determinarse los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y el número λ.

1426. Hallar la integral $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

Resolución. Aquí $n=3$, por eso la identidad respectiva tiene la forma

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=(b_0x^2+b_1x+b_2\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Derivando ambos miembros, obtenemos

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2b_0x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Eliminamos el denominador:

$$x^3+2x^2+3x+4=(2b_0x+b_1)(x^2+2x+2)+(b_0x^2+b_1x+b_2)(x+1)+\lambda,$$

o bien,

$$x^3+2x^2+3x+4=3b_0x^3+(5b_0+2b_1)x^2+(4b_0+3b_1+b_2)x+$$
$$+(2b_1+b_2+\lambda).$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de x, obtendremos

$$\begin{cases} 3b_0=1,\\ 5b_0+2b_1=2,\\ 4b_0+3b_1+b_2=3,\\ 2b_1+b_2+\lambda=4.\end{cases}$$

Resolviendo el sistema, hallamos $b_0=1/3$, $b_1=1/6$, $b_2=7/6$, $\lambda=5/2$. Por lo tanto,

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+\frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.$$

Hallar las integrales:

1427. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. **1428.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

1429. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$. **1430.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

1431. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx$. **1432.** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

1433. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$. **1434.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$.

1435. $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$. **1436.** $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$.

6. Integrales de diferenciales binomias $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, donde m, n, p son números racionales. Como demostró P. Chébishev, las integrales de diferenciales binomias se expresan por funciones elementales solamente en tres casos:

1) p es un número entero; entonces la integral dada se reduce a la integral de la función racional con ayuda de la sustitución $x = t^s$, donde s es el mínimo común múltiplo de las fracciones m y n;

2) $(m+1)/n$ es un número entero; en este caso la integral dada se transforma en una integral racional con ayuda de la sustitución $a + bx^n = t^s$;

3) $(m+1)/n + p$ es un número entero; en este caso lleva al mismo objetivo la sustitución $ax^{-n} + b = t^s$, donde s es el denominador de la fracción p.

1437. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

Resolución. Aquí la función integrando se puede escribir de la forma $x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{-10}$, o sea, $p=-10$ es un número entero. Por lo tanto, tenemos el primer caso de la integrabilidad de diferencial binomia. Por eso conviene efectuar la sustitución $x = t^4$; entonces $dx = 4t^3\,dt$ y la integral buscada tiene la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^2\,(t+1)^{10}} = 4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}.$$

La última integral se determina así:

$$\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}} = \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}\,dt = \int \frac{dt}{(t+1)^9} - \int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \int (t+1)^{-9}\,d\,(t+1) -$$
$$-\int (t+1)^{-10}\,d\,(t+1) = -\frac{1}{8\,(t+1)^8} + \frac{1}{9\,(t+1)^9} + C.$$

De este modo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = -\frac{1}{2\,(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9\,(\sqrt[4]{x}+1)^9} + C.$$

1438. Hallar la integral $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Resolución. Escribiendo la función integrando en la forma $x^3(a^2-x^2)^{-3/2}$, tenemos $m=3$, $n=2$, $p=-3/2$. Como $(m+1)/n = (3+1)/2 = 2$ es un número entero, entonces tiene lugar el segundo caso de integrabilidad. Utilizando la sustitución $a^2 - x^2 = t^2$, obtenemos $-2x\,dx = 2t\,dt$, $x\,dx = -t\,dt$,

$x^2 = a^2 - t^2$. Por lo tanto,

$$\int x^3 (a^2-x^2)^{-3/2}\,dx = -\int (a^2-t^2)\,t^{-3}\cdot t\,dt = -\int \frac{a^2-t^2}{t^2}\,dt =$$

$$= \int dt - a^2 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2+a^2}{t} + C = \frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

1439. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Resolución. Aquí $m = -4$, $n = 2$, $p = -1/2$ y $(m+1)/n + p = [(-4+1)/2 - 1/2 = -2$, o sea un número entero. Por eso tiene lugar el tercer caso de la integrabilidad de una diferencial binomia. Hacemos $x^{-2} + 1 = t^2$; entonces $-2x^{-3}\,dx = 2t\,dt$, $x^{-3}\,dx = -t\,dt$. Transformamos la integral dada del modo siguiente:

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \int x^{-4}[x^2(x^{-2}+1)]^{-1/2}\,dx = \int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-1/2}\,x^{-3}\,dx.$$

Por consiguiente,

$$I = -\int (t^2-1)\,t^{-1}\cdot t\,dt = -\int (t^2-1)\,dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

Hallar las integrales:

1440. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$. **1441.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$.

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **1443.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

1444. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$. **1445.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

§ 4. Integración de funciones trigonométricas

1. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde R es una función racional. Las integrales del tipo indicado se reducen a las de funciones racionales con ayuda de la llamada *sustitución trigonométrica universal* $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

Como resultado de esta sustitución tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t;\ dt = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

1446. Hallar la integral $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x+3\cos x+5}$.

Resolución. La función integrando depende racionalmente de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$; efectuamos la sustitución $\operatorname{tg}(x/2)=t$; entonces $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=$ $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y

$$\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x+3\cos x+5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int \frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C.$$

Retornando a la vieja derivada, obtenemos

$$\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x+3\cos x+5}=-\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}+C.$$

1447. Hallar la integral $\frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}$.

Resolución. Suponiendo $\operatorname{tg}(x/2)=t$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)}=\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{(at)^2+b^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

En muchos casos la sustitución universal $\operatorname{tg}(x/2)=t$ lleva a cálculos complicados, ya que al aplicarla $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se expresan por t en forma de fracciones racionales que contienen t^2.

En algunos casos particulares la determinación de las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ puede ser simplificada.

1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función impar respecto a $\operatorname{sen} x$, o sea, si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x)=-R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\cos x=t$.

2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función impar respecto a $\cos x$, o sea, si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x)=-R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza por medio de la sustitución $\operatorname{sen} x=t$.

3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función par respecto a $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o sea, si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)=R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces lleva al objetivo la sustitución $\operatorname{tg} x=t$.

1448. Hallar la integral $\int \frac{(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^3 x)\,dx}{\cos 2x}$.

Resolución. Puesto que la función integrando es impar respecto al seno, hacemos $\cos x=t$. De aquí $\operatorname{sen}^2 x=1-t^2$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$,

$dt = -\text{sen}\, x\, dx$. De este modo

$$\int \frac{\text{sen}\, x+\text{sen}^3 x)\, dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2)\, dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\, dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Por consiguiente.

$$\int \frac{(\text{sen}\, x+\text{sen}^3 x)\, dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C.$$

Notemos que en el caso examinado la integral puede siempre escribirse en la forma $\int R^* (\text{sen}^2 x,\ \cos x)\, \text{sen}\, x\, dx$.

1449. Hallar la integral $\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x}$.

Resolución. Aquí la función integrando es impar respecto al coseno. Por eso aplicamos la sustitución $\text{sen}\ x = t$; entonces $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - t^2$, $\cos x\ dx = dt$. Por lo tanto,

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x\,(1+\cos^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\, dt}{t^2+t^4}.$$

Pero

$$\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}$$

y, por consiguiente,

$$\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\, dt}{t^2(1+t^2)} = t - \frac{2}{t} - 6\,\text{arctg}\, t + C.$$

Finalmente obtenemos

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x} = \text{sen}\, x - \frac{2}{\text{sen}\, x} - 6\,\text{arctg}\,(\text{sen}\, x) + C.$$

Notemos que en el caso examinado la integral siempre puede escribirse de la forma $\int R^* (\text{sen}\, x,\ \cos^2 x)\cos x\, dx$.

1450. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x+2\,\text{sen}\, x\cos x-\cos^2 x}$.

Resolución. La función integrando es par respecto al seno y al coseno. Haciendo $\text{tg}\ x = t$, obtenemos

$$\text{sen}\, x = \frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$x = \text{arctg}\, t;\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

De aquí,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+2t-1},$$

pero,

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Por eso tenemos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Notemos que la determinación de la integral se puede simplificar si en la integral inicial se divide el numerador y el denominador por $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1}=\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1}.$$

2. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$. Vamos a destacar aquí dos casos que tienen importancia especial.

Caso 1. A menos uno de los exponentes m o n es un número positivo impar. Si n es un número positivo impar, entonces se aplica la sustitución $\operatorname{sen} x = t$, pero si m es un número positivo impar se efectúa la sustitución $\cos x = t$.

1451. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx$.

Resolución. Haciendo $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\,dx = dt$, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx=\int \operatorname{sen}^4 x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x\,dx=\int t^4(1-t^2)^2\,dt=$$

$$=\int t^4\,dt-2\int t^6\,dt+\int t^8\,dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9+C=$$

$$=\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x+\frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x+C.$$

1452. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}\,dx=\int \operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^{-4/3} x\,dx=\int (1-\cos^2 x)\cos^{-4/3} x\operatorname{sen} x\,dx.$$

Haciendo $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x\,dx = dt$, obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}\,dx=-\int (1-t^2)\,t^{-4/3}\,dt=-\int t^{-4/3}\,dt+\int t^{2/3}\,dt=$$

$$=3t^{-1/3}+\frac{3}{5}t^{5/3}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$$

Caso 2. Ambos exponentes m y n son números positivos pares. Aquí conviene transformar la función integrando con ayuda de las fórmulas

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x, \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \tag{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \tag{3}$$

1453. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$.

Resolución. De la fórmula (1) se deduce que

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = (\operatorname{sen} x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x.$$

Aplicando ahora la fórmula (2), obtenemos

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x).$$

De suerte que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.$$

1454. Hallar la integral $\int \cos^6 x \, dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (3), obtenemos

$$\int \cos^6 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int dx + \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx +$$
$$+ \frac{1}{8} \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x +$$
$$+ \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{16} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx -$$
$$- \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\operatorname{sen} 2x) = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x +$$
$$+ \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C =$$
$$= \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$$

1455. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \frac{1}{2}\,d\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\,d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$$

3. Integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, donde m es un número positivo entero.
Al determinar tales integrales se aplica la fórmula

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad (\text{o bien } \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1)$$

con cuya ayuda se disminuye sucesivamente el grado de la potencia de la tangente o de la cotangente.

1456. Hallar la integral $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x\,d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

1457. Hallar la integral $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \int \operatorname{ctg}^4 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^4 x\,d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} -$$

$$-\int \operatorname{ctg}^2 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} +$$

$$+\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C.$$

4. Integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$, donde n es un número positivo par. Tales integrales se determinan análogamente a las examinadas en el punto 3 con ayuda de la fórmula

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (\text{o bien } \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

1458. Hallar la integral $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x\cdot \sec^2 x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\,d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x\,d(\operatorname{tg} x) +$$

$$+2\int \operatorname{tg}^6 x\,d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x +$$

$$+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C.$$

1459. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x\,dx =$$

$$= \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx -$$

$$-\int \operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

5. Integrales del tipo $\int \sec^{2n+1} x\,dx$ y $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx$. Las integrales de la potencia positiva impar de la secante o de la cosecante se determinan más simplemente por las fórmulas recurrentes:

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\int \sec^{2n-1} x\,dx, \tag{1}$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\int \operatorname{cosec}^{2n-1} x\,dx. \tag{2}$$

1460. Hallar la integral $\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula recurrente (2) para $2n+1=5$, o sea para $n=2$, obtendremos

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} + \frac{3}{4}\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx;$$

haciendo ahora $2n+1=3$, o sea, $n=1$, por la misma fórmula tenemos

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2}\cdot\int \operatorname{cosec} x\,dx,$$

pero

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} - \frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

6. Integrales del tipo sen mx cos $nx\,dx$, $\int$ cos mx cos $nx\,dx$, $\int$ sen $\times$ $\times\, mx$ sen $nx\,dx$. Las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)], \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \qquad (3)$$

posibilitan la representación del producto de las funciones trigonométricas en forma de una suma.

1461. Hallar la integral $\int \operatorname{sen} 2x\cos 5x\,dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (1) obtenemos

$$\int \operatorname{sen}2x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}7x+\operatorname{sen}(-3x)]\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}7x\,dx-\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}3x\,dx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

1462. Hallar la integral $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Resolución. Aplicamos al producto $\cos x\cos\frac{x}{2}$ la fórmula (2):

$$\int\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Volviendo a utilizar la misma fórmula, encontramos

$$\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)dx+$$
$$+\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4}x+\cos\frac{x}{4}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{7}\operatorname{sen}\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{4}+\operatorname{sen}\frac{x}{4}+C.$$

Hallar las integrales:

1463. $\int\frac{dx}{3+5\operatorname{sen}x+3\cos x}$. **1464.** $\int\frac{dx}{1-\operatorname{sen}x}$.

1465. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+4\operatorname{sen}x\cos x}$.

1466. $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x}$. **1467.** $\int\frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\cos^3 x-\operatorname{sen}^2 x-1}$

Indicación: hacer $\operatorname{ctg} x=t$.

1468. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. **1469.** $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$.

1470. $\int \operatorname{sen}^2 (x/4) \cos^2 (x/4)\,dx$. **1471.** $\int \cos^4 x\,dx$.

1472. $\int \operatorname{tg}^4 (x/2)\,dx$. **1473.** $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx$.

1474. $\int \sec^6 x\,dx$. **1475.** $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$.

1476. $\int \operatorname{ses}^3 x\,dx$. **1477.** $\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec} x\,dx$.

1478. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x\,dx$. **1479.** $\int \cos (x/2) \cos (x/2)\,dx$

7. Sustituciones trigonométricas. Las integrales del tipo

$$\int R\,(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\,)\,dx,\quad \int R\,(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx,\quad \int R\,(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$$

se reducen a integrales de una función racional respecto a sen t y cos t con ayuda de la sustitución correspondiente: para la primera integral $x = a \operatorname{sen} t$ (o bien $x = a \cos t$), para la segunda $x = a \operatorname{tg} t$ (o bien $x = a \operatorname{ctg} t$) y para la tercera $x = a \sec t$ (o bien $x = a \operatorname{cosec} t$).

1480. Hallar la integral $I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$.

Resolución. Hacemos $x = a \operatorname{sen} t$, entonces $dx = a \cos t\,dt$ y la integral dada adopta la forma

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2 \operatorname{sen}^2 t}}{a \operatorname{sen} t}\,a \cos t\,dt =$$
$$= a \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt = a \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt = a \int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} -$$
$$- a \int \operatorname{sen} t\,dt = a \ln | \operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t | + a \cos t + C.$$

Para determinar la integral $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t}$ hemos utilizado la fórmula $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \ln | \operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t | + C$, *ya que con su ayuda es más fácil pasar* a la vieja variable x.

Así, pues, obtenemos

$$I = a \ln \left| \frac{1}{\operatorname{sen} t} - \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \right| + a \cos t + C,$$

donde $\operatorname{sen} t = x/a$, $\cos t = \sqrt{a^2-x^2}/a$. Por consiguiente,

$$I = a \ln \left| \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1481. Hallar la integral $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $x = a \operatorname{tg} t$, de donde $dx = a \sec^2 t\, dt$. Entonces obtenemos

$$I = \int \frac{a \sec^2 t\, dt}{a \operatorname{tg} t \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec^2 t\, dt}{\operatorname{tg} t \sec t} =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t}\, dt = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C,$$

donde $\operatorname{tg} t = x/a$ y, por lo tanto, $\operatorname{ctg} t = a/x$, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{a^2 + x^2}/x$. De este modo, obtenemos

$$I = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x} \right| + C.$$

1482. Hallar la integral $I = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $x = a \sec t$, de donde $dx = a \sec t \operatorname{tg} t\, dt$. Entonces obtenemos

$$I = \int \frac{a^2 \sec^2 t \cdot a \sec t \cdot \operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}}\, dt = a^2 \int \sec^3 t\, dt.$$

Aplicamos luego la fórmula recurrente (1) del punto 5 para $n = 1$:

$$\int \sec^3 t\, dt = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2} \int \sec t\, dt = \frac{\operatorname{sen} t}{2 \cos^2 t} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C,$$

donde $\sec t = x/a$, $\cos t = a/x$, $\operatorname{sen} t = \sqrt{x^2 - a^2}/x$, $\operatorname{tg} t = \sqrt{x^2 - a^2}/a$. Por consiguiente,

$$I = \frac{a^2 \operatorname{sen} t}{2 \cos^2 t} + \frac{a^2}{2} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C.$$

Hallar las integrales:

1483. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$. **1484.** $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

1485. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}}$.

§ 5. Integración de funciones diversas

Hallar las integrales:

1486. $\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 3x\, dx$. **1487.** $\int (2x^2 - 2x + 1)\, e^{-x/2}\, dx$.

1488. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$. **1489.** $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$.

1490. $\int (2x^2 - 1) \cos 2x\, dx$. **1491.** $\int x \ln^2 x\, dx$.

1492. $\int \frac{2e^{2x}-e^{x}-3}{e^{2x}-2e^{x}-3}\,dx.$ 1493. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

1494. $\int \sqrt{2^{x}-1}\,dx.$ 1495. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^{4}}}.$

1496. $\int \sqrt{6+4x-2x^{2}}\,dx.$ 1497. $\int e^{2x}\operatorname{sen} e^{x}\,dx.$

1498. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x\sqrt{2+5\operatorname{tg}^{2} x}}.$

1499. $\int \operatorname{sen} 2x \ln\cos x\,dx.$

1500. $\int (x+2)\cos(x^{2}+4x+1)\,dx.$

1501. $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^{3} x}\,dx.$ 1502. $\int \frac{xe^{x}}{\sqrt{1+e^{x}}}\,dx.$

1503. $\int \ln(x^{2}+x)\,dx.$ 1504. $\int \frac{dx}{x^{4}+x^{2}}.$

1505. $\int \cos\ln x\,dx.$ 1506. $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^{3}}}\,dx.$

1507. $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx.$ 1508. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$

1509. $\int \frac{dx}{a^{2}\cos^{2} x+b^{2}\operatorname{sen}^{2} x}.$

1510. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{2} x\cos^{2} x}.$ 1511. $\int \frac{dx}{(1+x^{2})^{2}}.$

Capítulo X. Integral definida

§ 1. Cálculo de una integral definida

Sea la función $f(x)$ definida sobre un segmento $[a, b]$. Dividimos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$, escogemos en cada segmento elemental $[x_{k-1}, x_k]$ un punto arbitrario ξ_k y hallemos la longitud de cada segmento: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Se llama *suma integral* para la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ a la suma que tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Se denomina *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (o bien dentro de los límites de a a b) al límite de la suma integral a condición de que la longitud del mayor de los segmentos elementales tienda a cero:

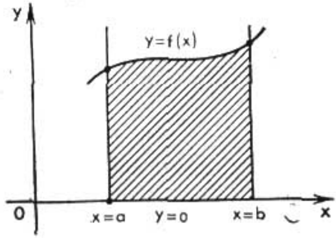


Fig. 42

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división del segmento $[a, b]$ en segmentos elementales ni de la elección de los puntos ξ_k (*teorema de existencia* de la integral definida).

Si $f(x) > 0$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa geométricamente el área de un *trapecio curvilíneo*, o sea, de la figura acotada por las líneas $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 42).

Propiedades principales de una integral definida

1ª. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

2ª. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3ª. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

4ª. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$

5ª. $\int_a^b C\cdot f(x)\,dx = C\cdot \int_a^b f(x)\,dx$, donde C es una constante.

6ª. *Estimación de una integral definida*: si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Reglas de cálculo de las integrales definidas

1. *Fórmula de Newton — Leibniz:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es la primitiva para $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$.

2. *Integración por partes:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

donde $u = u(x)$, $v = v(x)$ son funciones continuamente derivables en el segmento $[a, b]$.

3. *Cambio de variable*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

donde $x = \varphi(t)$ es una función continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ en el segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$; $f[\varphi(t)]$ es una función continua en el segmento $[\alpha, \beta]$.

4. Si $f(x)$ es una función impar, o sea, $f(-x) = -f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Si $f(x)$ es una función par, o sea, $f(-x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

1512. Calcular la integral $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ como límite de la suma integral.

Resolución. Aquí $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$; dividimos el segmento $[0, 1]$ en n partes congruentes, entonces $\Delta x_k=(b-a)/n=1/n$ y escogemos $\xi_k=x_k$. Tenemos

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\quad x_n=\frac{n}{n}=1;$$

$$f(\xi_1)=\left(\frac{1}{n}\right)^2;\quad f(\xi_2)=\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(\xi_n)=\left(\frac{n}{n}\right)^2;$$

$$f(\xi_k)\Delta x_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

Aquí ha sido utilizada la fórmula de suma de los cuadrados de números naturales.

1513. Calcular $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$ por la fórmula de Newton—Leibniz.

Resolución. Tenemos

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1514. Estimar la integral $\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Resolución. Como $|\cos x\leqslant 1$, entonces para $x>10$ obtendremos la desigualdad $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right|<10^{-2}$. Por consiguiente,

$$\left|\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right|<8\cdot 10^{-2}\,|<10^{-1},\ \text{o sea,}\ \left|\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right|<0{,}1.$$

1515. Estimar la integral $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Resolución. Puesto que $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, tenemos

$$\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{5} \text{ y } \frac{\pi}{16} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{\pi}{10}.$$

1516. Calcular $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Resolución. Aplicamos el método de integración por partes. Hacemos $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, de donde $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Entonces

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

1517. Calcular $\int_0^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Resolución. Hacemos $\ln x = t$; entonces $\frac{dx}{x}\,dt$; si $x = 1$, $t = 0$; si $x = e$, $t = 1$. Por consiguiente,

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

1518. Calcular $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2\,dx}$.

Resolución. Hacemos $x = r \operatorname{sen} t$; entonces $dx = r\cos t\,dt$; si $x = 0$, $t = 0$; si $x = r$, $t = \pi/2$. Por eso

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2 t}\; r\cos t\,dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}r^2\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right)\right] = \frac{\pi r^2}{4}.$$

1519. Calcular $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Resolución. La función integrando es par y por eso $I = 2\int_0^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Integramos por partes haciendo $u = x$, $dv = \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$; entonces $du = dx$, $v =$

$=\frac{1}{\cos x}$. De aquí hallamos

$$\int_0^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Por lo tanto,

$$I = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right).$$

1520. Calcular $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

Resolución. La función integrando es impar, por consiguiente, $I = 0$.

1521. Calcular $\int\limits_0^1 x\, dx$ como límite de la suma integral.

1522. Calcular $\int\limits_0^1 e^x\, dx$ como límite de la suma integral.

1523. Estimar la integral $\int\limits_0^1 x(1-x)^2\, dx.$

1524. Estimar la integral $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

1525. Estimar la integral $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$

Calcular las integrales:

1526. $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\, dx.$ **1527.** $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^4}.$

1528. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx.$ **1529.** $\int\limits_0^1 e^{x+e^x}\, dx.$

1530. $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos \ln x\, dx.$ **1531.** $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\, dx.$

1532. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}.$ **1533.** $\int\limits_0^{2\pi} \cos 5x \cos x\, dx.$

1534. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \operatorname{sen} 2x\, dx$. **1535.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\, dx$.

1536. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$. **1537.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$.

1538. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{x^2+1}\, dx$. **1539.** $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Indicación: utilizar la propiedad de una función impar.
Indicación: utilizar la propiedad de una función par.

1540. Demostrar que

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n \end{cases}$$

(m y n son números positivos enteros).

§ 2. Integrales impropias

1, Conceptos básicos. Se llaman *integrales impropias*: 1) a las que tienen límites infinitos; 2) a las de funciones ilimitadas.

La integral impropia de una función $f(x)$ dentro de los límites desde a hasta $+\infty$ se define por la igualdad

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Si este límite existe y es finito, la integral impropia se llama *convergente*; pero si el límite no existe o es igual a infinito ella se denomina *divergente*.

Análogamente

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

y

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Si la función $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en un punto c de un segmento $[a, b]$ y es continua cuando $a \leqslant x < c$ y $c < x \leqslant b$, entonces, según la definición, se hace

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{a}^{c-\alpha} f(x)\, dx + \lim_{\beta \to 0} \int\limits_{c+\beta}^{b} f(x)\, dx.$$

Una integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ (donde $f(c)=\infty$, $a<c<b$) se llama *convergente* si existen ambos límites en el segundo miembro de la igualdad o *divergente* si no existe por lo menos uno de ellos.

1541. Calcular la integral impropia $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ (o determinar su divergencia).

Resolución. Tenemos

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty} \operatorname{sen} x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} 0)=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{sen} b,$$

o sea, el límite no existe. Por consiguiente, la integral impropia diverge.

1542. Calcular $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1,$$

o sea, la integral impropia converge.

1543. Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Resolución. La función integrando es par, por eso $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Entonces

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}.$$

De este modo $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, o sea, la integral impropia converge.

1544. Hallar $\int_0^1\frac{dx}{x}$.

Resolución. La función integrando $f(x)=1/x$ en el punto $x=0$ es ilimitada y por eso tenemos

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\int_a^1\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\Big|\ln x\Big|_{a\to0}^1=\lim_{a\to0}(\ln 1-\ln a)=+\infty,$$

o sea, la integral impropia diverge.

1545. Hallar $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)=\frac{1}{2},$$

o sea, la integral impropia converge.

Calcular las integrales impropias:

1546. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **1547.** $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$.

1548. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^5\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **1549.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1550. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. **1551.** $\int\limits_{0}^{1} x\ln^2 x\,dx$.

1552. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

2. Criterios de comparación. Al investigar la convergencia de integrales impropias se utiliza uno de los criterios de comparación.

1. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ están definidas para todas las $x\geqslant a$ y son integrables en un segmento $[a, A]$, donde $A\geqslant a$, y si $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ para todas las $x\geqslant a$, entonces de la convergencia de la integral $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ resulta la convergencia de la integral $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, además, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\leqslant\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$.*

2. (a) *Si para $x\to+\infty$ la función $f(x)\geqslant 0$ es una infinitésima de orden $p>0$ en comparación con $\frac{1}{x}$, entonces la integral $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge para $p>1$ y diverge para $p\leqslant 1$.*

(b) *Si la función $f(x)\geqslant 0$ está definida y es continua en el intervalo $a\leqslant x<b$, así como es infinitamente grande de orden p en comparación con*

$\frac{1}{b-x}$ *para* $x\to b-0$, *entonces la integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *converge para* $p<1$ *y diverge para* $p\geqslant 1$.

1553. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Resolución. Según la definición

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A x^{-p}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_a^A=$$

$$=\frac{1}{-p+1}\cdot\lim_{A\to+\infty}A^{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\cdot a^{-p+1}.$$

Supongamos que $p>1$; entonces $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-p+1}=0$. Por lo tanto, para $p>1$ la integral converge. Sea $p\leqslant 1$; entonces $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-p+1}=\infty$, o sea, la integral $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ para $p\leqslant 1$ diverge.

1554. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (*integral de Fresnel*).

Resolución. Sea $x=\sqrt{\tau}$; entonces $\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$. Representemos la integral que está a la derecha en forma de la suma

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau+\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

El primer sumando es una integral propia, ya que $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}=0$ y al segundo sumando le apliquemos la integración por partes, haciendo $u=1/\sqrt{\tau}$, $dv=\operatorname{sen}\tau\,d\tau$:

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau}}=-\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^3}}=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos\tau\,d\tau}{\tau^{3/2}}.$$

La última integral converge, ya que $\frac{\cos\tau}{\tau^{3/2}}\leqslant\frac{1}{\tau^{3/2}}$ y la integral $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^{3/2}}$ converge.

Por eso la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$ converge basándose sobre el criterio (2a) y, por consiguiente, la integral dada también converge.

1555. Investigar la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

Resolución. La función integrando $f(x) = 1/(1+x^{10})$ en el intervalo de integración es menor que $\varphi(x) = 1/x^{10}$ y la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ es convergente. Por lo tanto, la integral dada también converge.

1556. Investigar la convergencia de la integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $(a < b)$.

Resolución. Según la definición

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{1}{-p+1} \lim_{\varepsilon \to 0} (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} + \frac{1}{-p+1} (b-a)^{-p+1}.$$

Si $p < 1$, entonces $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = 0$; pero si $p > 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = \infty$; si, por último, $p = 1$, entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \infty.$$

Por consiguiente, para $p < 1$ la integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge y para $p \geqslant 1$ diverge.

1557. Investigar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$.

Resolución. La función integrando es infinitamente grande para $x \to 1$. Representamos esta función en la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}},$$

o sea, el orden de esta función infinitamente grande cuando $x \to 1$ en comparación con $1/(1-x)$ es igual a $p = 1/3 < 1$. Por eso la integral dada converge basándose en el criterio (2b).

1558. Investigar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x}-1} dx$.

Resolución. La función integrando $f(x)$ en el intervalo de integración es positiva y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Aplicando el teorema sobre infinitésimas equivalentes, transformamos el numerador y el denominador de la fracción subintegral: tenemos $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}$ y $e^{\operatorname{sen} x}-1 \sim \operatorname{sen} x$ cuando $x \to 0$, de donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty,$$

o sea, $f(x)$ es *infinitamente grande de orden* $p = 2/3$ *en comparación con* $1/x$. Por lo tanto, según el criterio (2b) la integral dada converge.

Investigar la convergencia de los siguientes integrales impropias:

1559. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ **1560.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$

1561. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$ **1562.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx.$

1563. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx.$ **1564.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$

1565. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$

§ 3. Cálculo del área de una figura plana

El área de un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$ por las rectas $x = a$ y $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox se determina por la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El área de una figura limitada por las curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x) \times$ $\times [f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ y por las rectas $x = a$ y $x = b$ se determina por la fórmula

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Si la curva está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces el área del trapecio curvilíneo limitado por esta curva, por las rectas $x = a$, $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox se expresa por la fórmula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt,$$

donde t_1 y t_2 se determinan de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $[y(t) \geqslant 0$ cuando $t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$.

El área de un sector curvilíneo limitado por una curva definida en las coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$ y por dos radios polares $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ se expresa por la integral

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta.$$

1566. 1) Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y por el eje Ox.

Resolución. La parábola corta al eje Ox en los puntos O (0; 0) y M (40); Por consiguiente,

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ (unidades cuadradas).}$$

2) Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = (x - 1)^2$ y la hipérbola $x^2 = y^2/2 = 1$ (fig. 42a).

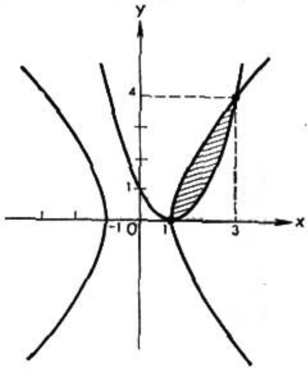


Fig. 42a

Resolución. Hallamos el punto de intersección de la parábola con la hipérbola, resolviendo conjuntamente la ecuación de estas curvas:

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1, \text{ o bien, } x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0.$$

El primer miembro de esta ecuación se puede descomponer en sus factores: $(x - 1)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$, de aquí, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, e $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

$$S = \int_1^3 [\sqrt{2(x^2-1)} - (x-1)^2]\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} [x\sqrt{x^2} - 1 + \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})] \Big|_1^3 -$$

$$- \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} [3\sqrt{8} + \ln (3\sqrt{8})] - \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln (3 + \sqrt{8}) \simeq 4{,}58 \text{ [unidades cuadradas.}$$

1567. Calcular el área de la figura plana limitada por una onda de la cicloide $x = 2(t - \text{sen}\, t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (véase la fig. 5) y el eje Ox.

Resolución. Aquí $dx = 2(1 - \cos t)\, dt$ y t varía de $t_1 = 0$ a $t_2 = 2\pi$. Por consiguiente,

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2 \, dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= 4 \left[t - 2 \,\text{sen}\, t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \text{sen}\, 2t \right]_0^{2\pi} = 12 \text{ (unidades cuadradas).}$$

1568. Hallar el área de la figura plana limitada por la lemniscata $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ (véase la fig. 2).

Resolución. A una cuarta parte del área buscada le corresponde la variación de θ desde 0 hasta $\pi/4$ y por eso

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta \, d\theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (unidades cuadradas).}$$

Calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas dadas:

1569. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

1570. $y = 16/x^2$, $y = 17 - x^2$ (cuadrante I).

1571. $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

1572. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (cuadrante I).

1573. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

1574. $y = 0{,}25x^2$, $y = 3x - 0{,}5x^2$.

1575. $xy = 4\sqrt{2}$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $x = 4$.

1576. $x = 12 \cos t + 5 \operatorname{sen} t$, $y = 5 \cos t - 12 \operatorname{sen} t$.

1577. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

1578. $\rho = 4/\cos(\theta - \pi/6)$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$.

1579. $\rho = a \cos \theta$, $\rho = 2a \cos \theta$.

1580. $\rho = \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ (a la derecha de la semirrecta $\theta = \pi/2$.)

1581. $\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$ (el área de un bucle).

1582. $\rho = 2 \cos \theta$, $\rho = 1$ (fuera del círculo $\rho = 1$).

§ 4. Cálculo de la longitud del arco de una curva plana

Si una curva $y = f(x)$ en un segmento $[a, b]$ es suave (o sea, la derivada $y' = f'(x)$ es continua), entonces la longitud del arco respectivo de esta curva se determina por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Al definir paramétricamente la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ [$x(t)$ e $y(t)$ son funciones derivables continuas], la longitud del arco de la curva, correspondiente a la variación monótona del parámetro t desde t_1 hasta t_2, se calcula por la fórmula

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt.$$

Si una curva suave está definida en las coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, entonces la longitud del arco es igual a

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta.$$

1583. Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ $(y \geqslant 0)$.

Resolución. Derivando la ecuación de la curva, hallamos $y' = (3/2)\,x^{1/2}$. De este modo,

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1=$$
$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-\frac{8}{27}=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

1584. Hallar la longitud del arco de la curva $x = \cos^5 t$, $y = \operatorname{sen}^5 t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi/2$.

Resolución. Hallamos las derivadas con respecto al parámetro t: $\dot{x} = -5\cos^4 t \operatorname{sen} t$, $\dot{y} = 5\operatorname{sen}^4 t\cos t$. Por lo tanto,

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-5\cos^4 t\operatorname{sen} t)^2+(5\operatorname{sen}^4 t\cos t)^2}\,dt=$$
$$=5\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} t\cos t\sqrt{\operatorname{sen}^6 t\cos^6 t}\,dt=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=$$
$$=-\frac{5}{8}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t)=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}\cdot\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t})\right]_0^{\pi/2}=\frac{5}{8}\left[2-\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right].$$

1585. Hallar la longitud del arco de la curva $\rho = \operatorname{sen}^3(\theta/3)$ desde $\theta_1 = 0$ hasta $\theta_2 = \pi/2$.

Resolución. Tenemos $\rho' = \operatorname{sen}^2(\theta/3)\cos(\theta/3)$. Por consiguiente,

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{3}+\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3}).$$

Calcular las longitudes de los arcos de las curvas:

1586. $y = \ln\operatorname{sen} x$ desde $x = \pi/3$ hasta $x = \pi/2$.

1587. $y=(2/5)\,x\sqrt[4]{x}-(2/3)\sqrt[4]{x^3}$ entre los puntos de intersección con el eje Ox.

1588. $y = x^2/2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

1589. $y = 1 - \ln\cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/6$.

1590. $y = \operatorname{ch} x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

1591. $x = t^3/3 - t$, $y = t^2 + 2$ desde $t = 0$ hasta $t = 3$.

1592. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ desde $t = 0$ hasta $t = \ln\pi$.

1593. $x = 8 \operatorname{sen} t + 6 \cos t$, $y = 6 \operatorname{sen} t - 8 \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi/2$.

1594. $x = 9(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (longitud del arco de una onda de la cicloide).

1595. $\rho = \theta^2$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

1596. $\rho = a \operatorname{sen} \theta$.

1597. $\rho = a \cos^3 (\theta/3)$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/2$.

1598. $\rho = 1 - \cos \theta$.

§ 5. Cálculo del volumen de un cuerpo

1. Cálculo del volumen de un cuerpo por las áreas conocidas de las secciones transversales. Si el área de la sección de un cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox puede ser expresada como función de x, o sea, de la forma $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el volumen de la parte del cuerpo comprendida entre los planos $x = a$ y $x = b$ perpendiculares al eje Ox se determina por la fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

2. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución. Si un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución se calcula por la fórmula

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Si la figura limitada por las curvas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ $[0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ y las rectas $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

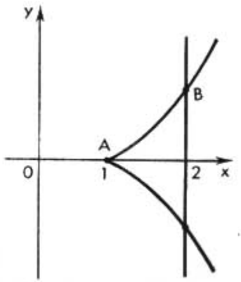


Fig. 43

1599. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución en torno al eje Ox de la figura limitada por la curva $y^2 = (x - 1)^3$ y la recta $x = 2$ (fig. 43).

Resolución. Tenemos

$$V = \pi \int_1^2 y^2\, dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3\, dx = \frac{1}{4} \pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \pi \text{ (unidades cúbicas).}$$

1600. Hallar el volumen de un cuerpo que tiene por base un triángulo isósceles de altura h y base a. La sección transversal del cuerpo es el segmento de una parábola con la cuerda igual a la altura del segmento (fig. 44).

Resolución. Tenemos $|AB| = a$, $|OC| = h$, $|MK| = |DE|$, $|OK| = x$. Expresamos el área de la sección transversal como función de x para lo cual hallamos previamente la ecuación de la parábola. La longitud de la cuerda

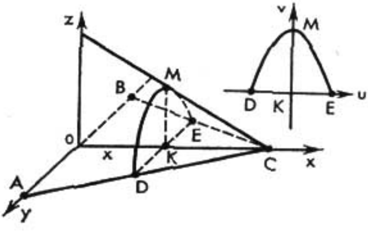


Fig. 44

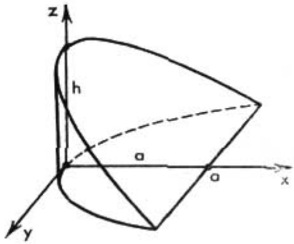


Fig. 45

DE se puede determinar a partir de la semejanza de los triángulos respectivos, a saber:

$$|DE|/a = (h - x)/h, \text{ o sea, } |DE| = a(h - x)/h = |MK|.$$

Tomamos $|DE| = m$, entonces la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas uKv tendrá la forma $v = m - \frac{4}{m}u^2$. De aquí encontramos el área de la sección transversal del cuerpo dado:

$$S = 2\int_0^{m/2}\left(m - \frac{4}{m}u^2\right)du = \frac{2}{3}m^2, \text{ o bien } S(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}.$$

De este modo,

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2\,dx = \frac{2}{9}a^2h.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución en torno al eje Ox de las figuras limitadas por las líneas:

1601. $y = \frac{64}{x^2+16}$, $\quad x^2 = 8y$.

1602. $y^2 = x$, $\quad x^2 = y$.

1603. $y = \sqrt{xe^x}$, $\quad x = 1$, $y = 0$.

1604. $y = x^2/2$, $\quad y = x^3/8$.

1605. Hallar el volumen de un cuerpo limitado por los planos $x = 1$, $x = 3$ si el área de su sección transversal es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la sección y el origen de coordenadas, y para $x = 2$ el área de la sección es igual a 27 (unidades cuadradas).

1606. Hallar el volumen de *una cuña cilíndrica por sus dimensiones* indicadas en la fig. 45 (problema de Arquímedes).

1607. Un vaso cilíndrico con agua lleva introducido un paraboloide de revolución vuelto con el vértice hacia abajo. La base y la altura del paraboloide coinciden con la base y la altura del vaso Hallar el volumen del agua que queda en el vaso si el radio de su base es igual a r y su altura es igual a h.

§ 6. Cálculo del área de una superficie de revolución

Si el arco de una curva suave $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ gira alrededor del eje Ox, entonces el área de la superficie de revolución se calcula por la fórmula

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Si la curva está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt.$$

1608. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución en torno al eje Ox del arco del sinusoide $y = \operatorname{sen} 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.

Resolución. Hallamos $y' = 2\cos 2x$; entonces

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \sqrt{1+4\cos^2 2x}\, dx.$$

Efectuamos el cambio de la variable: $2\cos 2x = t$, $-4 \operatorname{sen} 2x\, dx = dt$, $\operatorname{sen} 2x\, dx = (-1/4)\, dt$. Determinamos los límites de integración con respecto a t: si $x = 0$, $t = 2$; si $x = \pi/2$, $t = -2$.

De este modo

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)\right] \text{ (unidades cuadradas).}$$

Hallar las áreas de las superficies engendradas por la revolución en torno al eje Ox de los arcos de las curvas:

1609. $y = 2 \operatorname{ch}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

1610. $y = x^3$ desde $x = 0$ hasta $x = 1/2$.

1611. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

1612. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t$ (área engendrada por la revolución de un arco).

§ 7. Momentos estáticos y momentos de inercia de arcos y figuras planas

Supongamos que en el plano xOy está representado el sistema de los puntos materiales $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, . . ., $A_n(x_n;\ y_n)$ con las masas $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$. Se llama *momento estático* M_x de este sistema con respecto al eje Ox a la suma de los productos de las masas de estos puntos por sus ordenadas:

$$M_x=\sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k.$$

Análogamente (como suma de los productos de las masas de los puntos por sus abscisas) se determina el momento estático del sistema con respecto al eje Oy:

$$M_y=\sum_{k=0}^{k=n} m_k x_k.$$

Se denominan *momentos de inercia* I_x e I_y del sistema con respecto a los ejes Ox y Oy a las sumas de los productos de las masas de los puntos por los cuadrados de sus distancias al eje respectivo. De este modo,

$$I_x=\sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k^2; \qquad I_y=\sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k^2.$$

Por momentos estáticos y momentos de inercia de los arcos y figuras planas se toman los momentos respectivos de las masas convencionales distribuidas uniformemente a lo largo de estos arcos y figuras con densidad (lineal o de superficie plana) igual a la unidad.

Los momentos estáticos y los momentos de inercia del arco de una curva plana $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ se calculan por las fórmulas:

$$M_x=\int_a^b y\,dL; \quad M_y=\int_a^b x\,dL; \quad I_x=\int_a^b y^2\,dL; \quad I_y=\int_a^b x^2\,dL,$$

donde $dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ es la diferencial del arco de la curva.

Los momentos estáticos y los momentos de inercia de un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y=f(x)$, por el eje Ox y por dos rectas $x=a$ y $x=b$, se calculan por las fórmulas siguientes:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y\,dS=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y=\int_a^b x\,dS=\int_a^b xy\,dx,$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y=\int_a^b x^2\,dS=\int_a^b x^2 y\,dx.$$

En estas fórmulas $dS = y\,dx$ es la diferencial del área del trapecio curvilíneo.

1613. Hallar el momento estático y el momento de inercia de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$ respecto al eje Ox.

Resolución. El momento estático M_x lo calculamos por la fórmula $M_x = \int_a^b y\,dL$, donde $dL = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y' = -x/\sqrt{r^2-x^2}$. Entonces obtendremos

$$M_x = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = r\int_{-r}^{r} dx = 2r^2.$$

Determinamos el momento de inercia respecto al eje Ox:

$$I_x = \int_a^b y^2\,dL = \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx =$$

$$= r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2r\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Efectuemos la sustitución $x = r$ sen t, $dx = r\cos t\,dt$; si $x=0$; $t=0$; si $x=r$, $t=\pi/2$. Por consiguiente,

$$I_x = 2r\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\; r\cos t\,dt =$$

$$= r^3\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = r^3\left[t+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

1614. Hallar el momento de inercia de la elipse $x = a\cos t$, $y = b$ sen t respecto al eje Oy.

Resolución. El momento de inercia del área de la elipse respecto al eje Oy es igual a $I_y = \int_{-a}^{a} x^2\,dS$, donde $dS = 2y\,dx$. A partir de las ecuaciones paramétricas de la elipse encontramos $dS = 2b$ sen $t\cdot a$ $(-$sen $t)\,dt = -2ab$ sen^2 $t\,dt$, de donde

$$I_y = 2\int_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t\,(-2ab\,\mathrm{sen}^2\,t)\,dt = -4a^3b\int_{\pi/2}^{0} \mathrm{sen}^2\,t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,a^3b\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi a^3b}{4}.$$

1615. Hallar los momentos estáticos y los momentos de inercia del arco de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a$ sen $^3 t$ que está en el cuadrante I (fig. 46).

Resolución. En virtud de la simetría de la astroide respecto a los ejes de coordenadas, $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Por eso es suficiente calcular los momentos respecto al eje Ox. Para el cuadrante I tenemos $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Encontramos

$$dL = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt,$$

$$M_x = \int_a^b y\, dL = \int_0^{\pi/2} a \cdot \operatorname{sen}^3 t \cdot 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3a^2}{5} \operatorname{sen}^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} a^2,$$

$$I_x = \int_a^b y^2\, dL = \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^6 t \cdot 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3}{8} a^3 \operatorname{sen}^8 t \int_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} a^3.$$

De suerte que $M_x = M_y = (3/5)\, a^2$; $I_x = I_y = (3/8)\, a^3$.

1616. Hallar el momento de inercia de un segmento parabólico en el cual la cuerda sea igual a a y la flecha respecto a la cuerda sea igual a h (fig. 47).

Resolución. Tenemos $|AB| = a$, $|OC| = h$. La ecuación de la parábola se escribe de la forma $y = h - Nx^2$, donde el coeficiente indeterminado N

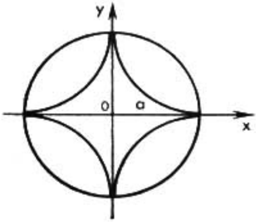


Fig. 46

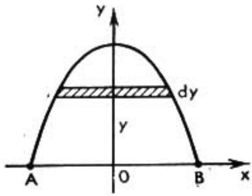


Fig. 47

se puede encontrar valiéndose del hecho de que el punto B $(a/2;\ 0)$ pertenece a la parábola; $0 = h - Na^2/4$, o bien $N = 4h/a^2$; por consiguiente, $y = h - 4hx^2/a^2$. Ahora hallamos el momento de inercia buscado:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{-a/2}^{a/2} y^3\, dx = \frac{2}{3} \int_0^{a/2} \left(h - \frac{4h}{a^2} x^2\right)^3 dx = \frac{16}{105} ah^3.$$

1617. Hallar el momento estático y el momento de inercia del arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, donde $0 \leqslant x \leqslant a$, respecto al eje Ox.

1618. Hallar el momento estático y el momento de inercia de un triángulo que tenga la base a y la altura h respecto a su base.

1619. Hallar el momento de inercia de un segmento parabólico limitado por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3$ respecto al eje Ox.

1620. Hallar el momento de inercia de un rectángulo que tenga por lados a y b respecto al eje de simetría del mismo.

1621. Hallar el momento polar de inercia de un círculo con diámetro d, o sea, el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro del círculo y es perpendicular a su plano.

§ 8. Determinación de las coordenadas del centro de gravedad. Teoremas de Guldin

Las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de una curva plana $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ se expresan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x\, dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y\, dL,$$

donde $dL = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, y L es la longitud del arco.

Las coordenadas del centro de gravedad de un trapecio curvilíneo se calculan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x\, dS = \frac{1}{S} \int_a^b xy\, dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y\, dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2\, dx,$$

donde $dS = y\, dx$, y S es el área de la figura.

Teoremas de Guldin

Teorema 1. *El área de una superficie engendrada por la revolución del arco de una figura plana alrededor de un eje que esté en el plano de esta curva y no la corte, es igual a la longitud del arco de la curva multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad del arco.*

Teorema 2. *El volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de una figura plana alrededor de un eje que no lo corte y esté en el plano de la misma, es igual al producto del área de esta figura por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la figura.*

1622. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Resolución. **Como la curva es simétrica con respecto al eje Oy, su centro de gravedad está sobre el eje Oy, o sea $\bar{x} = 0$. Queda por encontrar $\bar{y}$. Tenemos $y' = \operatorname{sh}(x/a)$; entonces $dL = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x/a)}\, dx = \operatorname{ch}(x/a)\, dx$; la longitud del arco**

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2 \int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2a \operatorname{sh} 1.$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{1}{2a \operatorname{sh} 1} \int_{-a}^{a} a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \int_0^a \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \left[x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right]_0^a =$$

$$= \frac{a}{2 \operatorname{sh} 1} \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\right) = \frac{a(2 + \operatorname{sh} 2)}{4 \operatorname{sh} 1} \approx 1{,}18a.$$

1623. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una figura limitada por el arco de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$, situado en el cuadrante I, y por los ejes de las coordenadas.

Resolución. En el cuadrante I al crecer x desde 0 hasta a, el valor de t decrece de $\pi/2$ a 0; por eso

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^a xy\,dx = \frac{1}{S}\int_{\pi/2}^0 a\cos t\cdot b\,\text{sen}\,t\,(-a\,\text{sen}\,t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2b}{S}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 t\cos t\,dt = \frac{a^2b}{S}\,\frac{1}{3}\,\text{sen}^3 t\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2b}{3S}.$$

Aplicando la fórmula del área de la elipse $S = \pi ab$, obtendremos $\bar{x} = (4a^2b)/(3\pi ab) = (4a)/(3\pi)$.

Análogamente determinamos

$$\bar{y} = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2S}\int_{\pi/2}^0 b^2\,\text{sen}^2 t\,(-a\,\text{sen}\,t)\,dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = \frac{2b}{\pi}\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

De este modo, $\bar{x} = 4a/(3\pi)$, $\bar{y} = 4b/(3\pi)$.

1624. Hallar las áreas de las superficies y los volúmenes de los anillos (toros) engendrados por la revolución del círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$ alrededor de los ejes Ox y Oy ($a \geqslant r$, $b \geqslant r$).

Resolución. Si el círculo gira en torno al eje Ox, el centro de gravedad está alejado a partir del eje de revolución a la distancia b; por eso el área de la superficie, según el primer teorema de Guldin, es igual a $S_x = 2\pi r\cdot 2\pi b = 4\pi^2 br$ y el volumen, conforme al segundo teorema de Guldin, es igual a $V_x = \pi r^2\cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2$.

Si la revolución se efectúa en torno al eje Oy, la distancia del centro de gravedad del círculo al eje Oy es igual a a. Entonces $S_y = 2\pi r\cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$, $V_y = \pi r^2\cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2$.

1625. Hallar, valiéndose del teorema de Guldin, las coordenadas del centro de gravedad del cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

Resolución. Al girar el cuadrante del círculo alrededor del eje Ox obtenemos una semiesfera cuyo volumen es igual a $V = (1/2)\cdot(4\pi r^3/3) = 2\pi r^3/3$. De acuerdo con el segundo teorema de Guldin $V = (\pi r^2/4)\cdot(2\pi\bar{y})$. De aquí $\bar{y} = 2V/(\pi^2 r^2) = 2\cdot 2\pi r^3/(3\pi^2 r^2) = 4r/(3\pi)$. El centro de gravedad del cuadrante del círculo está sobre el eje de simetría, o sea, sobre la bisectriz del ángulo I de las coordenadas y por eso $\bar{x} = \bar{y} = 4r/(3\pi)$.

1626. Hallar las coordenadas de los centros de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y del semicírculo limitado por esta semicircunferencia y el eje Ox.

1627. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una figura limitada por las líneas $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \cos x$.

1628. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un segmento parabólico limitado por las líneas $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

1629. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\text{sen}^3\,t$ (en el cuadrante I).

1630. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

1631. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \text{sen}\,x$.

1632. Hallar, valiéndose de un teorema de Guldin, el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de un semicírculo de radio r alrededor de la tangente paralela al diámetro.

1633. Valiéndose de un teorema de Guldin, demostrar que el centro de gravedad de un triángulo está alejado de su base a una tercera parte de la altura.

Indicación. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del triángulo en torno a la base.

1634. Valiéndose de un teorema de Guldin, hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de un rectángulo, que tiene por lados 6 y 8, alrededor de un eje que pase por su vértice perpendicularmente a la diagonal.

§ 9. Cálculo de un trabajo y de una presión

Un *trabajo de una fuerza variable* $X = f(x)$ que actúa en el sentido del eje Ox sobre el segmento $[x_0, x_1]$ se calcula por la fórmula

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Para calcular la *fuerza de presión de un líquido* se utiliza el principio de Pascal de acuerdo con el cual la presión ejercida por un líquido sobre una plataforma es igual a su área S multiplicada por la profundidad de sumersión h, la densidad ρ y la aceleración de la gravedad g, o sea,

$$P = \rho g h S.$$

1635. ¿Qué trabajo se necesita efectuar para estirar un resorte en 4 cm si se sabe que sometido a la carga de 1 N el resorte se estira 1 cm?

Resolución. Conforme a la ley de Hooke la fuerza X N que estira el resorte en x m es igual a $X = kx$. Determinemos el coeficiente de proporcionalidad k partiendo de la condición siguiente: si $x = 0{,}01$ m, entonces $X = 1$ N; por lo tanto, $k = 1/0{,}01 = 100$ y $X = 100x$. Entonces

$$A = \int_0^{0,04} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0{,}08 \text{ J}.$$

1636. ¿Qué trabajo realiza una grúa al extraer un estacón de hormigón armado del fondo del río de 5 m de profundidad si el estacón tiene la forma de un tetraedro regular con arista de 1 m y la densidad del hormigón armado es de 2500 kg/m³ (fig. 48)?

Resolución. La altura del tetraedro $h = \sqrt{6}/3$ m, el volumen del tetraedro $V = \sqrt{2}/12$ m³. El peso del estacón sumergido en el agua

$$P = (1/12)\cdot\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 9{,}8 - (1/12)\cdot\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}\text{N},$$

por eso el trabajo necesario para extraer el estacón hasta el momento en que su vértice aparecerá sobre la superficie del agua es igual a

$$A_0 = 1225\sqrt{2}\,(5-h) = 1225\sqrt{2}(5-\sqrt{6}/3) \cong 7227{,}5 \text{ J}.$$

Ahora determinemos el trabajo A_1 necesario para extraer del agua el estacón. *Supongamos que el vértice del tetraedro ha salido a una altura de* $5 + y$,

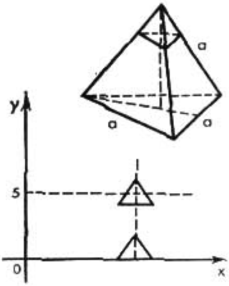


Fig. 48

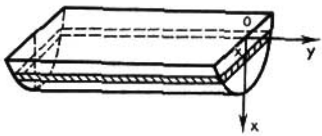


Fig. 49

entonces el volumen del pequeño tetraedro que emerge del agua es igual a $3\sqrt{3}y^3/8$ y el peso del tetraedro

$$P(y) = \frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\,y^3 3\sqrt{3}\right) 1000\cdot 9{,}8 \text{ N}.$$

Por consiguiente,

$$A_1 = \int_0^h \left(\frac{24\,500}{12}\sqrt{2} - \frac{9800}{12}\sqrt{2} + \frac{9800}{8}\,3y^3\sqrt{8}\right) dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{6}/3} (1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}\,y^3)\,dy = \left[1225\sqrt{2}\,y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}\,y^4\right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx$$

$$\approx 2082{,}5 \text{ J}.$$

De aquí

$$A = A_0 + A_1 = 7227{,}5 + 2082{,}5 = 9310 \text{ J} = 9{,}31 \text{ kJ}.$$

1637. Hallar el trabajo realizado para extraer el agua de una tina que tiene forma de semicilindro de longitud a y radio r (fig. 49).

Resolución. El volumen de una capa elemental de agua que se encuentra a la profundidad x y tiene longitud a, ancho $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ y espesor dx, es igual a

$$dV = am\,dx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

El trabajo elemental efectuado para elevar esta capa a la altura x es igual a $dA = 2\rho g a x \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$, donde ρ es la densidad del agua. Por lo tanto,

$$A = 2a\rho g \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = -a\rho g \left[\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^r = \frac{2}{3} \rho g a r^3.$$

1638. Un tubo de agua es de 6 cm de diámetro. Uno de sus extremos está unido con un depósito en el cual el nivel de agua es 100 cm más alto que el borde superior del tubo y el otro extremo está tapado por una mariposa. Hallar la presión total que es ejercida sobre la mariposa.

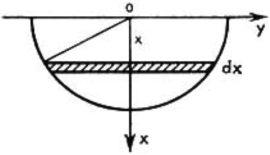


Fig. 50

Resolución. La mariposa es un círculo de 3 cm de radio. Dividimos el área de este círculo en elementos, o sea, en bandas paralelas a la superficie de agua. El área de un elemento así que está a la distancia y a partir del centro es igual (con exactitud hasta infinitésimos de orden superior) a $dS = 2\sqrt{9 - y^2}\, dy$, cm^2. Determinamos la fuerza de presión a la cual se somete este elemento:

$$dP = 2\rho g\, (103 - y) \sqrt{9 - y^2}\, dy = 1960\, (103 - y) \sqrt{9 - y^2}\, dy \text{ dinas}$$

(aquí $\rho = 1$ g/cm³). Por consiguiente,

$$P = 1960 \int_{-3}^{3} (103 - y) \sqrt{9 - y^2}\, dy =$$

$$= 1960 \left[103 \left(\frac{y}{2} \sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2} \arcsen \frac{y}{3} \right) + \frac{1}{3} (9 - y^2)^{3/2} \right]_{-3}^{3} =$$

$$= 980 \cdot 927\pi = 908\,460\pi \text{ erg} \approx 0{,}09\pi, \text{ J}.$$

1639. Hallar la presión que ejerce el agua sobre una pared vertical que tiene forma de semicírculo, cuyo diámetro es de 6 m y está sobre la superficie de agua (fig. 50). Densidad del agua $\rho = 1000$ kg/m³.

Resolución. La diferencial de la presión ejercida sobre una plataforma elemental se expresa del modo siguiente:

$$dP = 2\rho g x \sqrt{9 - x^2}\, dx = 19\,600 x \sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

De aquí

$$P = 19\,600 \int_0^3 x \sqrt{9 - x^2}\, dx = -\frac{19\,600}{3} (9 - x^2)^{3/2} \Big|_0^3 = 176\,400 \text{ N} = 176{,}4 \text{ kN}.$$

1640. Determinar la presión que la gasolina que está en un depósito cilíndrico, cuya altura $h = 3{,}5$ m y el radio de la base $r = 1{,}5$ m, ejerce sobre las paredes del mismo si $\rho = 900$ kg/m³.

Resolución. El elemento de la presión que se ejerce sobre la superficie de la pared en la banda separada se expresará así: $dP = \rho g \cdot 2\pi r x\, dx$. De aquí

$$P = 2\pi r \rho g \int_0^h x\, dx = \rho g \pi r h^2 = 9{,}8\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 \cdot 900 = 161\,700\, \pi \text{ N} = 161{,}7\, \pi \text{ kN}.$$

1641. ¿A qué presión está sometida una placa rectangular de largo a y de ancho b ($a > b$) si se halla inclinada con respecto al horizonte del líquido bajo un ángulo α y su lado mayor se encuentra a una profundidad h (fig. 51)?

Resolución. El área de una banda elemental separada a la profundidad x es igual a $dS = (a/\text{sen}\,\alpha)\,dx$. Por lo tanto, el elemento de la presión $dP = (ax\rho g/\text{sen}\,\alpha)\,dx$ (ρ es la densidad del líquido). De aquí determinamos

$$P = a\rho g \int\limits_{h}^{h+b\,\text{sen}\,\alpha} \frac{x\,dx}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{a\rho g}{\text{sen}\,\alpha}\cdot\frac{1}{2}\,x^2\Big|_h^{h+b\,\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{a\rho g}{2\,\text{sen}\,\alpha}\,[(h^2+2bh\,\text{sen}\,\alpha+b^2\,\text{sen}^2\,\alpha)-h^2] = ab\rho g\left(h+\frac{1}{2}\,b\,\text{sen}\,\alpha\right).$$

1642. Hallar la presión ejercida sobre una placa que tiene la forma de un trapecio isósceles, con las bases a y b y la altura h, y está sumergida en un líquido a la profundidad c (fig. 52).

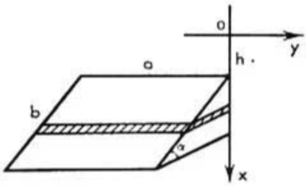


Fig. 51

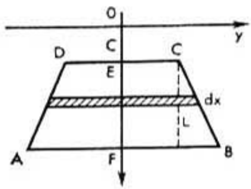


Fig. 52

Resolución. El área de una banda elemental se expresa así: $dS = (a+2l)\,dx$, donde $l = (b-a)(x-c)/(2h)$ (l se determina a partir de la semejanza de los triángulos). Por consiguiente,

$$P = \rho g \int\limits_{c}^{c+h} \left[a + \frac{b-a}{h}(x-c)\right] x\,dx =$$

$$= \rho g\left[\frac{ax^2}{2} + \frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{cx^2}{2}\right)\right]_c^{c+h} = \left[\frac{a+b}{2}\,ch + \frac{h^2}{6}(a+2b)\right]\rho g.$$

1643. Determinar el trabajo realizado para extraer el agua de un recipiente cónico, cuya base es horizontal y se encuentra debajo del véritce, si el radio de la base es igual a r y su altura es h.

1644. De una cisterna cilíndrica se extrae un líquido. ¿Qué trabajo se necesita realizar si la longitud de la cisterna es igual a a y su diámetro es d?

1645. Por la grúa, con ayuda de un cable sujetado en el vértice, se eleva del agua una piedra de forma cónica. Hallar el trabajo realizado para extraer completamente la piedra del agua si el vértice del cono se encontraba en la superficie de agua. El radio de la base del cono es de 1 m, la altura es de 3 m, la densidad es de 2,5 g/cm³.

Indicación: aquí $P(y) = 14\,700\pi + (9800/27)\,\pi y^3$ N.

1646. Un cono recto de fundición, cuya altura es de 40 cm y el radio de la base es también de 40 cm, se encuentra sobre el fondo de un depósito lleno por completo de aceite de petróleo. Determinar el trabajo que se necesita efectuar para extraer este cono del depósito si la densidad de la fundición $\rho_1 = 7{,}22$ g/cm³ y la densidad del aceite de petróleo $\rho_2 = 0{,}89$ g/cm³.

Indicación: aquí $P(y)$ es igual al peso del cono menos el peso de la masa de petróleo desalojada del agua por la parte del cono, o sea, $P(y) = \frac{1}{3}\pi\cdot 40^3\rho_1 g -$ $- \left(\frac{1}{3}\pi\cdot 40^3 - \frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 g$ dinas.

1647. Una botella cilíndrica de 24 cm de diámetro y 80 cm de largo está llena de gas bajo una presión de 2 kPa. ¿Qué trabajo hace falta realizar comprimiendo isotérmicamente el gas, para que su volumen se reduzca a la mitad?

1648. Una placa triangular está sumergida, con el vértice vuelto hacia arriba, en un líquido cuya densidad es igual a ρ. Determinar la presión que el líquido ejerce sobre la placa si la base del triángulo es igual a a y su altura es h. El vértice del triángulo está sobre la superficie.

1649. Determinar la presión que ejerce la gasolina, contenida en un depósito cilíndrico cuya altura $h = 4$ m y el radio $r = 2$ m ($\rho = 900$ kg/m³), sobre las paredes del recipiente a cada metro de profundidad.

1650. Una placa redonda de diámetro d está sumergida en un líquido de densidad ρ de modo que toque la superficie de éste. Hallar la presión que el líquido ejerce sobre la placa.

Componiendo las sumas integrales respectivas y efectuando el paso al límite, resolver los problemas siguientes:

1651. Hallar la masa de una barra de 100 cm de longitud si la densidad lineal de ésta varía según la ley $\delta = (20x + 0{,}15x^2)$ g/cm, donde x es la distancia a uno de los extremos de la barra.

1652. La velocidad de un punto varía según la ley $v = (100 + 8t)$ m/s. ¿Qué camino recorrerá este punto durante el intervalo de tiempo $[0, 10]$?

1653. Un punto se desplaza por el eje Ox a partir del punto $M(1; 0)$ de modo que su velocidad sea igual a la abscisa. ¿Dónde se encontrará este punto dentro de 10 s después de comenzar su movimiento?

1654. La velocidad de un punto varía según la ley $v = 2(6 - t)$ m/s. ¿Cuál será el máximo alejamiento del punto a partir del comienzo de su movimiento?

§ 10. Algunas nociones sobre funciones hiperbólicas

1. Funciones hiperbólicas

Se llaman funciones hiperbólicas a las definidas por las igualdades:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \textit{seno hiperbólico},$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \textit{coseno hiperbólico},$$

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \textit{tangente hiperbólica},$$

$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \quad \textit{cotangente hiperbólica}.$$

El coseno hiperbólico es una función par, o sea, $\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x$, mientras que el seno hiperbólico, la tangente y cotangente hiperbólicas son funciones impares: $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x)=-\operatorname{cth} x$.

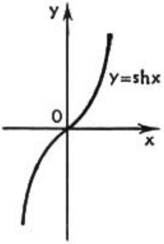


Fig. 53

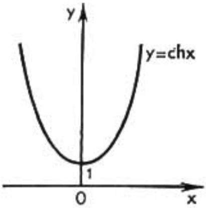


Fig. 54

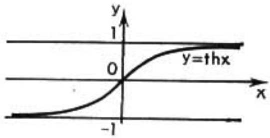


Fig. 55

Es útil tener en cuenta que $\operatorname{sh} 0=0$; $\operatorname{ch} 0=1$, $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x=1$.

Los gráficos de las funciones hiperbólicas $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$ e $y=\operatorname{th} x$ se muestran, respectivamente, en las figs. 53-55.

El gráfico de un coseno hiperbólico se llama *catenaria*. La catenaria es línea de comba de un hilo pesado suspendido de dos puntos.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan por las fórmulas $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)'=1/\operatorname{ch}^2 x$, $(\operatorname{cth} x)'=-1/\operatorname{sh}^2 x$.

Para integrar las funciones hiperbólicas tienen lugar las fórmulas

$$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C.$$

1655. Demostrar la validez de la igualdad

$$\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} a+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} a.$$

Resolución. Según la definición del seno hiperbólico tenemos

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{e^{x+a}-e^{-(x+a)}}{2}=\frac{e^{x}\cdot e^{a}-e^{-x}\cdot e^{-a}}{2}.$$

Como $e^x=\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x$, $e^{-x}=\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$, $e^a=\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a$, $e^{-a}=\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} a$, entonces

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a)-(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} a)}{2}.$$

Cumplidas las transformaciones algebraicas, obtenemos

$$\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} a+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} a.$$

1656. Expresar $\operatorname{ch}(x+a)$ por las funciones hiperbólicas de los argumentos x y a.

Resolución. Derivando respecto a x la igualdad

$$\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} a+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} a,$$

obtenemos

$$\operatorname{ch}(x+a)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} a.$$

1657. Expresar $\operatorname{sh} 2x$ y $\operatorname{ch} 2x$ por medio de $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

Resolución. Tenemos

$$\operatorname{sh} 2x=\operatorname{sh}(x+x)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x,\qquad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}(x+x)=$$
$$=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} x,$$

o sea,

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x;\qquad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

1658. Expresar $\operatorname{ch}^2 x$ y $\operatorname{sh}^2 x$ mediante el $\operatorname{ch} 2x$.

Resolución. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x,\\ \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1\end{cases}$$

respecto a $\operatorname{ch}^2 x$ y $\operatorname{sh}^2 x$, obtenemos

$$\operatorname{ch}^2 x=(\operatorname{ch} 2x+1)/2,\qquad \operatorname{sh}^2 x=(\operatorname{ch} 2x-1)/2.$$

1659. 1) Expresar las funciones hiperbólicas $\operatorname{ch} xi$ y $\operatorname{sh} xi$ del argumento imaginario por $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Resolución. Encontramos

$$\operatorname{sh} xi=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}=i\cdot\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=i\cdot\operatorname{sen} x,\qquad \operatorname{ch} xi=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=\cos x.$$

De suerte que $\operatorname{sh} xi=i\cdot\operatorname{sen} x$, $\operatorname{ch} xi=\cos x$.

2) Expresar la función trigonométrica $\operatorname{sen} xi$ y $\cos xi$ de argumento imaginario, por medio de $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

Resolución. Reemplazando en las fórmulas $\operatorname{sh} xi=i\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{ch} xi=\cos x$ (problema 1659) xi en lugar de x, obtenemos:

$$\operatorname{sh} xi^2=i\operatorname{sen} xi,\ \text{es decir,}\ \operatorname{sen} xi=\frac{\operatorname{sh}(-x)}{i}=i\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch} xi^2=\cos xi,\ \text{o sea,}\ \cos xi=\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x.$$

De este modo, sen $xi = i \operatorname{sh} x$, $\cos xi = \operatorname{ch} x$.

1660. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{ch} t$, $x = a \operatorname{sh} t$ para $a > 0$?

Resolución. Eliminamos de estas ecuaciones t, para lo cual restamos y^2 de x^2:

$$x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t), \quad \text{o sea,} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

La curva $x^2 - y^2 = a^2$ es una hipérbola equilátera de cuyas asíntotas sirven las rectas $y = \pm x$. La curva dada es la rama derecha de esta hipérbola, ya que $x = a \operatorname{ch} t > 0$ para cualquier t (fig. 56).

1661. Un punto M se encuentra en la rama derecha de la hipérbola equilátera $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. Desde el punto M se baja

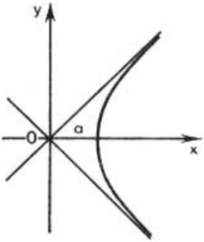


Fig. 56

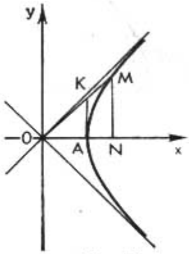


Fig. 57

la perpendicular MN al eje de las abscisas y este mismo punto está unido por el segmento OM con el origen de coordenadas. Desde el vértice A de la hipérbola se traza la perpendicular AK hasta intersecarse en el punto K con el segmento OM (fig. 57). Demostrar que $|NM| : a = \operatorname{sh} t$, $|ON| : a = \operatorname{ch} t$, $|AK| : a = \operatorname{th} t$.

Resolución. Tenemos

$$|NM| : a = y : a = \operatorname{sh} t, \quad |ON| : a = x : a = \operatorname{ch} t,$$

$$|AK| : a = |NM| : |ON| = (|NM| : a)/(|ON| : a) = \operatorname{sh} t/\operatorname{ch} t = \operatorname{th} t.$$

1662. 1) Un punto M se encuentra en la rama derecha de la hipérbola equilátera $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. Calcular el área del sector hiperbólico limitado por la rama de la hipérbola, el eje de las abscisas y el segmento OM (fig. 58).

Resolución. Tenemos $S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2} xy - \int\limits_a^x y\, dx$. Puesto que $x = a \operatorname{ch} t$ e $y = a \operatorname{sh} t$, $dx = a \operatorname{sh} t\, dt$, de donde

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - a^2 \int\limits_0^t \operatorname{sh}^2 t\, dt = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - \frac{a^2}{2} \int\limits_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2} t = \frac{a^2 t}{2}.$$

De este modo $t = 2S/a^2$. Así, pues, el argumento t de las funciones hiperbólicas se puede considerar como el cociente obtenido de la división del área duplicada del sector hiperbólico OAM por el cuadrado del semieje real.

2) Para la catenaria $y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$, donde $k = \frac{T_x}{\rho}$, establecer la dependencia entre la longitud del arco $ACB = S$, la horizontal l y la vertical h con las distancias de los puntos de suspensión (fig. 58a)

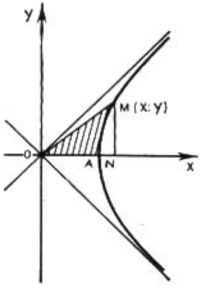


Fig. 58

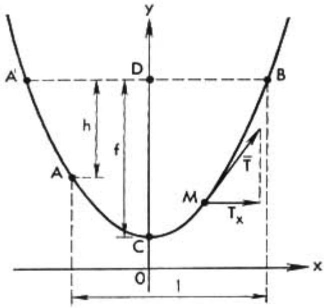


Fig. 58a

Determinar la componente horizontal de tensión T_x, si la densidad lineal del hilo $\rho = 200$ N/m, $S = 40$ m, $l = 20$ m, $h = 8$ m.

Resolución. Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Entonces, $l = x_2 - x_1$, $h = y_2 - y_1 = k\left(\operatorname{ch}\frac{x_2}{k} - \operatorname{ch}\frac{x_1}{k}\right) = 2k \operatorname{sh}\frac{x_2+x_1}{2k}\operatorname{sh}\frac{x_2-x_1}{2k} = 2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{sh}\frac{x_2+x_1}{2k}$. El largo del arco será $S = \int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\operatorname{ch}\frac{x}{k}\,dx = k\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{k} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{k}\right) = 2k\cdot\operatorname{sh}\frac{x_2-x_1}{2k}\operatorname{ch}\frac{x_2+x_1}{2k} = 2k\cdot\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\cdot\operatorname{ch}\frac{x_2+x_1}{2k}$.

Como $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$, entonces, $s^2 - h^2 = 4k^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2k}$, lo que determina la dependencia entre S, l y h, que se puede escribir así: $\frac{\operatorname{sh} l/2k}{l/2k} = \frac{\sqrt{S^2-h^2}}{l}$. De esta relación, conociendo S, l y h, se puede determinar el parámetro $k = \frac{T_x}{\rho}$, y luego la componente horizontal de la tensión $T_x = k\rho$. Designamos $\frac{l}{2k} = u$, entonces, $\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{\sqrt{S^2-h^2}}{l} = \frac{\sqrt{40^2-8^2}}{20} = 0{,}8\sqrt{6} = 1{,}96$. Obtenemos la ecuación $\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} = 1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \frac{u^6}{7!} + \ldots = 1{,}96$, de la cual, obtenemos con ayuda de la tabla, la raíz de u: $u = \frac{l}{2k} = 2{,}15$, de aquí,

$k=\frac{l}{2u}=\frac{20}{4,3}=4,65$ [m] y $T_x=k\rho=4,65\cdot 200=930$ N. De este modo, $\frac{\operatorname{sh} u}{u}=$ $=\frac{\sqrt{S^2-h^2}}{l}$, donde $u=\frac{l}{2k}$; $T_x=k\rho=930$ N.

3) **Determinar la flecha f de flexión del hilo en el ejercicio 1662, 2), si los puntos de suspensión se encuentran a igual altura (es decir, $y_1=y_2$, $h=0$, arco $A'CB$, fig. 58a).**

Resolución. $f=\overline{OD}-\overline{OC}=y_2-y_C=k\operatorname{ch}\frac{x_2}{k}-k$, pero $\overline{A'B}=l=2x_2$ y $x_2=\frac{l}{2}$, entonces, $f=k\left(\operatorname{ch}\frac{l}{2k}-1\right)=k\left(\frac{l^2}{2!\,2^2\cdot k^2}+\frac{l^4}{4!\,2^4\cdot k^4}+\frac{l^6}{6!\,2^6\cdot k^6}+\ldots\right)\approx\frac{l^2}{8k}$. Para $h=0$: $\frac{\operatorname{sh} u}{u}=\frac{S}{l}$, es decir, el arco $A'CB=S=l\,\frac{\operatorname{sh} u}{u}=l\left(1+\frac{u^2}{3!}+\right.$ $\left.+\frac{u^4}{5!}+\ldots\right)$, donde $u=\frac{l}{2k}$ y $S=l+\frac{l^3}{3!\,(2k)^2}+\frac{l^5}{5!\,(2k)^4}+\ldots\approx l+\frac{l^3}{24\,k^2}$. Hemos obtenido: $f\approx\frac{l^2}{8k}$ y $S\approx l+\frac{l^3}{24\,k^2}$. Eliminando k, tenemos: $S\approx l+$ $+\frac{8f^2}{3l}$ y $df\cong\frac{3l}{16f}\,dS$.

1663. Hallar las derivadas de las funciones:

1) $y=\ln\left(\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch}^2 x+1}\right)$; 2) $y=5\operatorname{sh}^3(x/15)+3\operatorname{sh}^5(x/15)$; 3) $y=2\operatorname{arctg}(\operatorname{th}(x/2))$; 4) $y=\operatorname{th} x-\frac{2}{3}\operatorname{th}^5 x+\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x$; 5) $y=$ $=\operatorname{arcctg}(1/\operatorname{sh} x)$; 6) $y=\ln\operatorname{th}(x^2/4)$.

1664. ¿En qué punto de la catenaria $y=\operatorname{ch} x$ la tangente forma con el eje de las abscisas un ángulo $\alpha=\pi/4$?

1665. Investigar la función $y=\operatorname{ch}\frac{x}{2}-1$ determinando su extremo.

1666. Hallar las integrales: 1) $\int x^2\operatorname{ch} x\,dx$; 2) $\int\operatorname{sh}^4 x\,dx$; 3) $\int\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}\,dx$; 4) $\int\operatorname{sh} x\operatorname{sen} x\,dx$; 5) $\int\frac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{ch}^3(x/2)}\,dx$; 6) $\int\operatorname{sh}^3\times$ $\times(x/3)\operatorname{ch}^2(x/3)\,dx$.

1667. Calcular las integrales definidas: 1) $\int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{sh}^2 x}}$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2}\operatorname{th}^2 x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 3}x\operatorname{ch} x\,dx$.

1668. Expresar $\operatorname{sh}(x-a)$ y $\operatorname{ch}(x-a)$ por las funciones hiperbólicas de los argumentos x y a.

1669. Expresar $\operatorname{th}(x+a)$ y $\operatorname{th}(x-a)$ por medio de $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{th} a$. Hallar $\operatorname{th} 2x$.

1670. Expresar por $\operatorname{ch} x$ las funciones hiperbólicas del medio argumento de $\operatorname{sh}(x/2)$, $\operatorname{ch}(x/2)$ y $\operatorname{th}(x/2)$.

1671. Reducir a una fórma cómoda para determinar por logaritmos las expresiones $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} y$, $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y$.

1672. Expresar $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$ por medio de $\operatorname{th}(x/2)$.

1673. Representar los productos de las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$ en forma de sumas.

1674. Calcular el área limitada por la curva $y = \operatorname{sh} x$ y las rectas $x = \ln 5$, $y = 0$.

1675. Hallar la longitud del arco de la curva $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, comprendido entre las rectas $x = 0$, $x = a$.

1676. Sobre la recta $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ se dan los puntos M y N correspondientes a los valores de $t = t_1$ y $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$. Calcular el área del sector OMN.

1677. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = a/\operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{th} t$ si $a > 0$, $b > 0$?

1678. ¿Qué línea es definida por las ecuaciones $x = \operatorname{ch}^2 t$, $y = \operatorname{sh}^2 t$?

1679. Se da $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{th} t$. Expresar $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ por medio de t.

1680. Simplificar la expresión $(\cos x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \operatorname{sh} y + i \operatorname{sen} x \cos y)^2$.

1681. Simplificar la expresión $(x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t)^2 - (x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t)^2$.

1682. Demostrar las identidades:

1) $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$;

2) $\operatorname{ch} nx = \dfrac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}$;

3) $\operatorname{sh} nx = \dfrac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}$.

1683. Utilizando las igualdades $\operatorname{sh}^n x = \dfrac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}$; $\operatorname{ch}^n x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}$, demostrar que

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16} \operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} x.$$

2. Funciones hiperbólicas inversas

En correspondencia con las funciones trigonométricas (circulares) inversas, se definen las funciones hiperbólicas inversas. Si $x = \operatorname{sh} y$, entonces, mediante $\operatorname{Arsh} x$ designamos el argumento del seno hiperbólico (la expresión «Ar» se emplea aquí como símbolo de área), es decir, y es el área del seno hiperbólico igual a x. De un modo análogo se definen las restantes funciones hiperbólicas inversas: $y = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$; $y = \operatorname{Ar} \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{Ar} \operatorname{cth} x$. Las funciones hiperbólicas inversas se expresan por medio de funciones logarítmicas: $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(x = \operatorname{ch} y \geqslant 1$, y el doble signo se debe a que, a cada valor de la función $\operatorname{ch} x$ le

corresponden dos valores del argumento y):

$$\operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1,$$

$$\operatorname{Ar\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \text{para } |x| > 1.$$

Los gráficos de las funciones hiperbólicas inversas corresponden al reflejo especular de los gráficos de las correspondientes funciones hiperbólicas con respecto a las bisectrices de los ángulos I y III de las coordenadas.

Observemos algunas propiedades de las funciones hiperbólicas inversas:

1) $y = \operatorname{Ar\,sh} x$ es una función impar, unívoca, con campo de definición $-\infty < x < +\infty$, con crecimiento monótono desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En el origen de las coordenadas esta función tiene un punto de inflexión y su centro de simetría. Su tangente en el punto de origen de las coordenadas, forma con el eje Ox un ángulo igual a $\frac{\pi}{4}$. No tiene asíntotas.

2) $y = \operatorname{Ar\,ch} x$, es una función biunívoca, con campo de definición $1 \leqslant x < +\infty$; el gráfico del $\operatorname{Ar\,ch} x$ es simétrico con respecto al eje Ox; en el punto M (1, 0) tiene una tangente vertical $x = 1$. Cuando x se incrementa ($x > 1$), y crece en términos absolutos.

3) $y = \operatorname{Ar\,th} x$, es una función impar, unívoca, con campo de definición $-1 < x < +1$, y crecimiento monótono desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En el origen de las coordenadas tiene su punto de inflexión y su centro de simetría. Sus asíntotas verticales son $x = \pm 1$.

4) $\operatorname{Ar\,cth} x$, es una función impar, unívoca, con campo de definición $|x| > 1$. Cuando $-\infty < x < -1$, decrece desde 0 hasta $-\infty$; cuando $+1 < x < +\infty$, decrece desde $+\infty$ hasta 0. No tiene extremos ni puntos de inflexión y sus asíntotas verticales son $x = \pm 1$.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas se hallan mediante las fórmulas:

$$(\operatorname{Ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad (\operatorname{Ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(\operatorname{Ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}; \ (|x|<1); \ (\operatorname{Ar\,cth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}, \quad (|x|>1).$$

Mostramos las fórmulas que vinculan las funciones hiperbólicas inversas con las trigonométricas inversas:

$$\operatorname{Ar\,sh} x = -i \operatorname{arc\,sen} xi; \quad \operatorname{Ar\,ch} x = \pm \operatorname{arc\,cos} xi;$$

$$\operatorname{Ar\,sh} xi = i \operatorname{arc\,sen} x, \text{ y } \operatorname{Ar\,ch} xi = \pm \operatorname{arc\,cos} x.$$

Capítulo XI. Elementos de programación lineal

§ 1. Desigualdades lineales y campo de soluciones de un sistema de desigualdades lineales

Sea dada una desigualdad lineal con dos variables x_1 y x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geqslant 0. \tag{1}$$

Si las variables x_1 y x_2 se consideran como coordenadas de un punto de un plano, entonces el conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad (1) se llama *campo de soluciones* de la desigualdad dada. El campo de soluciones de la desigualdad (1) es un semiplano.

Para determinar cuál entre los dos semiplanos corresponde a la desigualdad (1) basta reducir esta desigualdad a la forma $x_2 \geqslant kx_1 + l$ o bien a la forma $x_2 \leqslant kx_1 + l$. En el primer caso el semiplano buscado se halla encima de la recta $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ y en el segundo, debajo de ella. Si $a_2 = 0$, entonces la desigualdad se reduce a una de las formas $x_1 \geqslant h$ o bien $x_1 \leqslant h$, o sea, el semiplano está a la derecha o a la izquierda de la recta $x_1 = h$.

En el caso en que se da un sistema de desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geqslant 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

donde m es un número finito, obtendremos la intersección del número finito de semiplanos que forma un campo poligonal D. El campo D se denomina *campo de soluciones* del sistema de desigualdades (2). Este campo no siempre es limitado, puede ser no acotado e incluso vacío. El último caso tiene lugar cuando el sistema de ecuaciones (2) es contradictorio. Pueden ser también los casos de desigualdades superfluas que forman parte del sistema conjunto y definen las rectas que no tienen con el campo D puntos comunes. Tales desigualdades pueden ser eliminadas.

El campo de soluciones posee una particularidad importante: es *convexo*, o sea, junto con sus dos puntos cualesquiera contiene también todo el segmento que los une. La recta que tiene con el campo al menos un punto común de modo que todo el campo esté por un lado de esta recta se llama *recta de apoyo* con respecto a este campo.

De un modo análogo también se interpreta geométricamente un sistema de desigualdades con tres variables:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + b_3 \geqslant 0. \end{array}\right. \quad (3)$$

Aquí cada una de las desigualdades se cumple para uno de los semiespacios en los que un plano respectivo divide todo el espacio. El sistema de desigualdades (3) es la intersección de los semiespacios, o sea, un campo poliédrico de las soluciones del sistema de desigualdades.

1684. Hallar un semiplano que sea definido por la desigualdad $2x_1 + 3x_2 - 12 \leqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo el signo de desigualdad por el de igualdad exacta, obtendremos la ecuación de la recta $2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$, o sea, $x_2 = (-2/3)\,x_1 + 4$ (fig. 59). Reducimos la desigualdad dada a la forma $x_2 \leqslant (-2/3)\,x_1 + 4$. Por consiguiente, el semiplano buscado se halla debajo de la recta $x_2 = (-2/3)\,x_1 + 4$.

1685. ¿Qué semiplano define la desigualdad $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$?

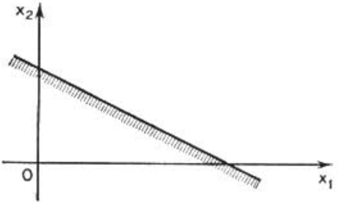


Fig. 59

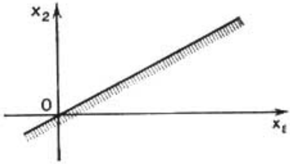


Fig. 60

Resolución. Sustituyendo el signo de desigualdad por el de igualdad exacta, obtendremos la ecuación de la recta $2x_1 - 3x_2 = 0$ ó bien $x_2 = (2/3)\,x_1$ que pasa por el origen de las coordenadas. De la desigualdad $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$, o bien $x_2 \leqslant (2/3)\,x_1$, resulta que el semiplano buscado está debajo de la recta $x_2 = (2/3)\,x_1$ (fig. 60).

1686. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - 1 \geqslant 0$, $x_2 - 1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 3 \geqslant 0$, $-6x_1 - 7x_2 + 42 \geqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdad por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de cuatro rectas: $x_1 - 1 = 0$, $x_2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 3 = 0$ y $6x_1 + 7x_2 - 42 = 0$ representadas en la fig. 61. Reducimos las desigualdades dadas a la forma $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant -x_1 + 3$, $x_2 \leqslant (-6/7)\,x_1 + 6$. El rayado muestra los semiplanos que sirven de campos de soluciones de las desigualdades respectivas. El campo de soluciones del sistema de desigualdades es un cuadrilátero convexo.

1687. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 2$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de cuatro rectas: $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 - 2 = 0$, $x_1 - x_2 + 1 = 0$, $x_1 = 2$ representadas en la fig. 62. Llevamos las desigualda-

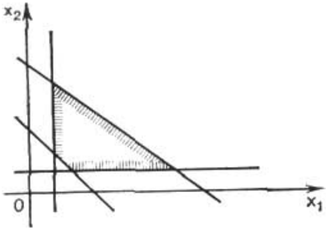


Fig. 61

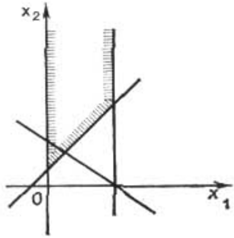


Fig. 62

des dadas a la forma $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant -x_1 + 2$, $x_2 \leqslant x_1 + 1$, $x_1 \leqslant 2$. El campo de soluciones del sistema de desigualdades es una figura convexa ilimitada.

1688. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 2$, $x_1 + 3x_2 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0$.

Resolución. Construyamos las rectas respectivas. En la fig. 63 vemos que no existe ningún punto común a los tres semiplanos. Esto quiere decir que el

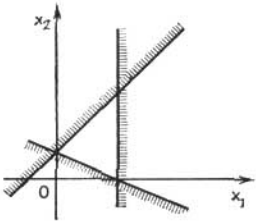


Fig. 63

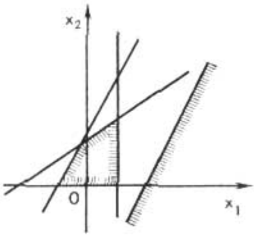


Fig. 64

campo de soluciones es «vacío» y el sistema dado de desigualdades es incompatible.

1689. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $2x_1 - x_2 \geqslant -2$, $x_1 - x_2 \geqslant -2$, $x_1 \leqslant 1$, $2x_1 - x_2 \geqslant 3$.

Resolución. Este sistema no tiene soluciones. Geométricamente esto significa que no existe ningún punto cuyas coordenadas satisfagan todas las desigualdades del problema dado (fig. 64).

1690. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $3x_1 - x_2 \geqslant 0$ (a), $x_1 - x_2 \leqslant 0$ (b), $2x_1 + x_2 \leqslant 6$ (c), $x_1 \leqslant 2$ (d), $3x_1 - x_2 \geqslant -4$ (e).

Resolución. A las cinco desigualdades dadas les corresponde un conjunto de puntos del plano, que forma el triángulo AOB (fig. 65). Las desigualdades (d) y (e) pueden ser eliminadas, ya que la desigualdad (e) define una recta de frontera que no tiene puntos comunes con el triángulo AOB, mientras que la recta definida por la desigualdad (d) tiene un solo punto común con el triángulo y es de apoyo.

1691. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 0$.

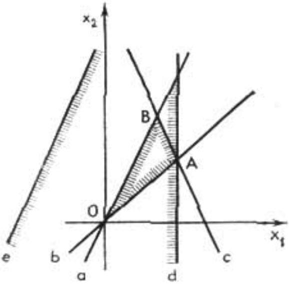


Fig. 65

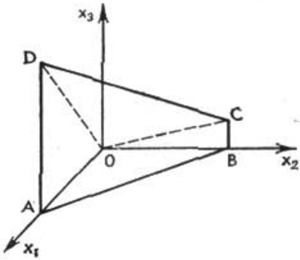


Fig. 66

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de planos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ que están representadas en la fig. 66. De campo de soluciones del sistema de desigualdades sirve el tetraedro $ABOCD$.

1692. *¿Cómo está situado el semiplano, si las coordenadas de sus puntos satisfacen la desigualdad* $x_1 - x_2 - 10 \geqslant 0$?

1693. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 7$.

1694. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - 5x_2 + 5 \geqslant 0$, $x_1 + 3x_2 - 3 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 5$.

1695. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 0$.

1696. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0$, $2x_1 + x_2 - 7 \geqslant 0$, $x_1 - 2x_2 + 4 \geqslant 0$.

1697. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_2 \geqslant 0$ (a), $4x_1 - x_2 \geqslant 0$ (b), $x_2 \leqslant 6$ (c), $4x_1 + x_2 \leqslant 40$ (d), $x_1 - x_2 + 8 \geqslant 0$ (e).

1698. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leqslant 0$.

1699. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \leqslant 4$, $2x_2 - x_3 \geqslant 0$, $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

§ 2. Problema principal de la programación lineal

El problema de la programación lineal consiste en estudiar los procedimientos de la determinación de los valores máximo o mínimo de una función lineal, en presencia de restricciones lineales.

La función cuyo valor máximo o mínimo se busca se llama *función objetivo* y el conjunto de valores de las variables con los cuales se alcanza el valor máximo o mínimo determina el llamado *plan óptimo*. Todo otro conjunto de valores que satisfaga las restricciones determina *un plan (solución) posible*.

Sean dadas las restricciones por un sistema compatible de m desigualdades lineales con n variables:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases}$$

Entre las soluciones no negativas de este sistema se requiere encontrar una solución tal que con ella la función lineal (función objetivo)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

alcance el valor máximo (mínimo) o, como se dice, maximizar (minimizar) la forma lineal de L.

Mostremos cómo se resuelve el problema indicado por el método geométrico, para lo cual nos limitamos a examinar el sistema compatible de desigualdades lineales con dos y tres variables. Sea dada, además, una función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Entre el conjunto de puntos $(x_1; x_2)$ que forman parte del campo de soluciones del sistema compatible de desigualdades, hallaremos aquellos que atribuyan a la función lineal dada el valor mínimo (máximo). Para cada punto del plano la función L toma un valor fijo $L = L_1$. El conjunto de todos estos puntos es la recta $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$ perpendicular al vector $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2)$ que parte del origen de coordenadas. Si esta recta se desplaza paralelamente a sí misma en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$, la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ crecerá y si ella se traslada en el sentido contrario, la función indicada decrecerá. Supongamos que al moverse la recta L en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$ ella tropieza por primera vez con el polígono de soluciones en su vértice, entonces en esta posición L_1 la recta L llega a ser *de apoyo* y sobre esta recta la función L toma el valor mínimo. Al moverse ulteriormente en el mismo sentido (positivo) la recta L pasará por otro vértice del polígono de soluciones saliendo del campo de soluciones y llega a ser también de apoyo, o sea, la recta L_2; en ella la función L toma el valor máximo en el polígono de soluciones.

De este modo la minimización y la maximización de la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ sobre el polígono de soluciones se obtienen en los puntos de intersección de este polígono con las rectas de apoyo que son perpendiculares al vector $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2)$. Una recta de apoyo puede tener con el polígono de soluciones un solo punto en común (un vértice del polígono) o un conjunto infinito de puntos (un lado del polígono).

Análogamente a lo dicho, la función lineal de tres variables $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_0$ toma un valor constante sobre el plano perpendicular al vector $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2; c_3)$. Los valores mínimo y máximo de esta función en el poliedro de soluciones se alcanzan en los puntos de intersección de este poliedro con los planos de apoyo perpendiculares al vector $\mathbf{C}$ $(c_1; c_2; c_3)$. El plano de apoyo puede tener con el polígono de soluciones un solo punto común (un vértice del polígono) o un conjunto infinito de puntos (este conjunto es una arista o una cara del polígono).

1700. Maximizar la forma lineal de $L = 2x_1 + 2x_2$ para las limitaciones: $3x_1 - 2x_2 \geqslant -6$, $3x_1 + x_2 \geqslant 3$, $x_1 \leqslant 3$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, construimos el campo de soluciones por las ecuaciones de las rectas $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3$ (fig. 67). El campo de soluciones de las desigualdades es el triángulo MNP. Trazamos el vector **C** (2; 2). Entonces la recta de apoyo al salir del triángulo de soluciones pasará por el

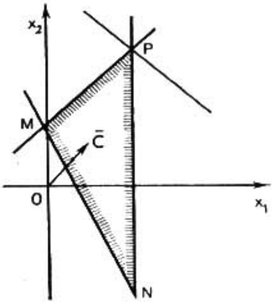


Fig. 67

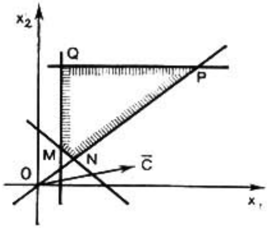


Fig. 68

punto P (3; 15/2) y por eso en el punto P la función lineal $L = 2x_1 + 2x_2$ toma el valor máximo, o sea, se maximiza y $L_{\max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (15/2) = 21$.

1701. Minimizar la función lineal $L = 12x_1 + 4x_2$ para las restricciones: $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $x_1 \geqslant 1/2$, $x_2 \leqslant 4$, $x_1 - x_2 \leqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, construimos el campo de soluciones limitado por las rectas $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 4$, $x_1 - x_2 = 0$. El campo de soluciones es el polígono $MNPQ$ (fig. 68). Trazamos el vector **C** (12; 4). La recta de apoyo pasa por el punto M (1/2; 3/2); este es el primer punto de intersección del polígono de soluciones con la recta L al desplazarse esta recta en el sentido positivo del vector **C**. En el punto M la función lineal $L = 12x_1 + 4x_2$ toma el valor mínimo $L_{\min} = 12 \cdot (1/2) + 4 \cdot (3/2) = 12$.

1702. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ para las limitaciones: $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $3x_1 + x_2 \leqslant 15$.

Resolución. Construimos el campo de soluciones del sistema de desigualdades por las ecuaciones de los planos: $x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $3x_1 + x_2 = 15$. El campo de soluciones es el poliedro $MNPQRS$ (fig. 69).

Trazamos el vector **C** (1; 3; 3). El plano de apoyo al desplazarse, en el sentido positivo del vector **C** sale del poliedro de soluciones en el punto N (4; 3; 0). Por eso en el punto N la función lineal $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ tomará el valor máximo, o sea, $L_{\max} = 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 13$.

1703. Hallar el valor máximo de la función $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ para las restricciones: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 8$.

Resolución. Construimos el campo de soluciones del sistema de desigualdades lineales tomando los planos $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Este campo es el poliedro $MNOPR$ (fig. 70). Construimos el vector **C** (3; —6; 2). Al desplazarse el plano de apoyo en el sentido positivo del vector **C**, él saldrá del poliedro de soluciones en los puntos de la

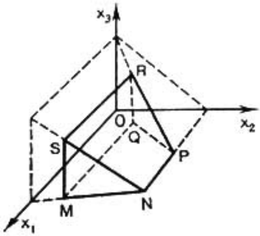


Fig. 69

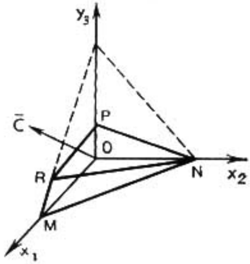


Fig. 70

arista MR. Por consiguiente, el valor máximo de la función dada se toma en los puntos del segmento MR. Cerciorémonos de ello sustituyendo las coordenadas de los puntos M (2; 0; 0) y R (16/11; 0; 9/11) en la forma lineal de L, obtendremos $L(M) = 6$, $L(R) = 6$.

1704. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 3x_2$ para las restricciones: $x_1 + 4x_2 \geqslant 4$, $x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_2 \leqslant 2$.

1705. Minimizar la función $L = x_1 - x_2$ para las restricciones: $3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 7$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $x_1 \leqslant 4$.

1706. Hallar el valor máximo de la función $L = 3x_1 - 4x_2$ para las restricciones: $x_1 - 2x_2 \geqslant 6$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 6$.

1707. Hallar el valor máximo de la función $L = -x_1 + 2x_2$ para las restricciones: $x_1 - 8x_2 \leqslant 10$, $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_1 - 5x_2 \geqslant -5$, $3x_1 + 10x_2 \leqslant 30$.

1708. Hallar el valor máximo de la función $L = 8x_1 - 2x_2$ para las restricciones: $3x_1 + 4x_2 \geqslant 18$, $3x_1 - x_2 \geqslant 3$, $x_2 \leqslant 6$, $2x_1 + x_2 \leqslant 18$, $4x_1 - x_2 \leqslant 24$.

1709. Minimizar la forma lineal de $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ para las restricciones: $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $3x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

1710. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ para las limitaciones: $x_1 + x_2 \leqslant 3$, $x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 0$.

1711. Hallar el valor máximo de la función $L = 10x_1 + x_3$ para las limitaciones: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6$, $3x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

§ 3. Método simplex

1. Noción be método simplex. La resolución del problema principal de la programación lineal por el método geométrico es demostrativa en el caso de dos e incluso tres variables. Sin embargo, si se trata de un número mayor de variables el método geométrico es inaplicable. El llamado *método simplex* es uno de los métodos analíticos de resolución del problema principal de la programación lineal. El sistema de limitaciones en los métodos de cálculo suele definirse por un sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

y entre las soluciones no negativas del sistema de ecuaciones (1) es necesario hallar aquellas que maximicen la función lineal

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0.$$

Expresemos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leqslant m)$ por medio de las variables restantes:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{array}\right. \tag{2}$$

donde $b'_1 \geqslant 0$, $b'_2 \geqslant 0$, ..., $b'_r \geqslant 0$. Si las condiciones limitativas están definidas por las desigualdades, se puede transformarles en igualdades introduciendo nuevas variables no negativas, las llamadas variables *de balance* (igualadoras). Así, por ejemplo, en la desigualdad $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n \leqslant b$ basta añadir al primer miembro cierta cantidad $x_{n+1} \geqslant 0$ y se obtendrá la igualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Las condiciones restrictivas pueden definirse también de un modo mixto, o sea, por desigualdades y ecuaciones, entonces por la vía indicada ellas pueden reducirse sólo a ecuaciones. Las variables (incógnitas) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se llaman *básicas* y todo el conjunto de ellas $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ se denomina *base*, las demás variables han recibido el nombre de variables *independientes*, el sistema de limitaciones (2) se llama *sistema de reducción a la base unitaria*. Sustituyendo en la forma lineal de L en vez de las variables básicas sus expresiones por las variables independientes del sistema (2), obtendremos

$$L = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_nx_n.$$

Ahora, suponiendo que todas las variables independientes son iguales a cero, hallamos los valores de las variables básicas: $x_1 = b'_1$, $x_2 = b'_2$, ..., $x_r = b'_r$. De este modo, la solución $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ del sistema es posible, tal solución se llama solución *básica*. Para la solución básica obtenida, el valor de la forma lineal de $L_B = \gamma_0$. La resolución del problema con ayuda del método *simplex se descompone en varios pasos consistentes en pasar de la base dada* B a otra B', de modo que el valor de L_B disminuye o, por lo menos, no aumente, o sea, $L_{B'} \leqslant L_B$.

Ilustramos la idea del método con ejemplos concretos.

1712. *Maximizar la forma lineal de* $L = -x_4 + x_5$ *para las restricciones* $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1$, $x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$, $x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$.

Resolución. El sistema dado de ecuaciones-restricciones es compatible, ya que los rangos de la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y de la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

coinciden y son iguales a 3. Por lo tanto el sistema de ecuaciones es compatible y tres variables (básicas) pueden expresarse linealmente mediante las dos variables independientes. Vamos a expresar, por ejemplo, x_1, x_2 y x_3 por medio de x_4 y x_5, o sea, reducimos el sistema a la base unitaria:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \qquad (*)$$

Expresemos la forma lineal de $L = -x_4 + x_5$ por las variables independientes x_4 y x_5 (en el ejercicio dado L ya está expresada por medio de x_4 y x_5). Ahora hallamos para $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ los valores de las variables básicas: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. De este modo, la primera solución posible del sistema de ecuaciones es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, o bien (1, 2, 3, 0, 0). Para la solución posible hallada la forma lineal de L tiene el valor 0, o sea, $L_1 = 0$.

Ahora tratemos de incrementar el valor de L_1; el aumento de x disminuirá L_1, ya que x_4 tiene coeficiente negativo, mientras que el aumento de x_5 incrementará también L_1. Por eso vamos a aumentar x_5 de modo que x_1, x_2, x_3 no lleguen a ser negativas dejando $x_4 = 0$. De la segunda ecuación del sistema (*) resulta que x_5 se puede aumentar hasta 2. Ahora bien, obtenemos los valores siguientes de las variables: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, o bien (5, 0, 1, 0, 2).

El valor de la forma lineal de L para la solución posible es igual a $L_2 = 2$. Con el segundo paso el valor de L ha aumentado.

Luego tomemos como variables independientes x_2 y x_4, o sea, precisamente aquellas que en la nueva solución tienen un valor nulo. Con este fin expresamos x_5 de la segunda ecuación del sistema (*) mediante x_2 y x_4, obteniendo que $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$. Entonces

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \end{cases} \qquad (**)$$
$$L = 2 - x_2 + x_4.$$

Para incrementar el valor de L vamos a aumentar x_4. De la segunda ecuación del sistema (**) se deduce que, a condición de que x_3 sea no negativa el valor de x_4 se puede llevar hasta $x_4 = 1/5$. Con esta condición la nueva solución posible es $x_1 = 28/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/5$, $x_5 = 12/5$, o bien (28/5, 0, 0, 1/5, 12/5). Con ello el valor de la forma lineal de $L_3 = 11/5$.

Expresemos ahora x_1, x_4, x_5 por las variables independientes x_2 y x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 28/5 - (3/5)\,x_3 - (7/5)\,x_2, \\ x_4 = 1/5 \;\; - (1/5)\,x_3 + (1/5)\,x_2, \\ x_5 = 12/5 - (2/5)\,x_3 - (3/5)\,x_2, \end{cases} \qquad (***)$$
$$L = 11/5 - (1/5)\,x_3 - (4/5)x_2.$$

Puesto que en la última forma lineal ambas variables libres entran con coeficientes negativos, el valor máximo de L se alcanza cuando $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Esto quiere decir que la solución (28/5, 0, 0, 1/5, 12/5) es óptima y $L_{max} = 11/5$.

1713. Maximizar la forma lineal de $L = x_2 + x_3$ para las restricciones: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$.

Resolución. El sistema de ecuaciones-restricciones es compatible, ya que los rangos de la matriz ampliada son los mismos e iguales a 2. Por consiguiente, dos variables básicas pueden expresarse linealmente por otras dos variables independientes. Tomamos como independientes las variables x_2 y x_3. Entonces

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3, \\ x_4 = 2 - x_2 + 2x_3, \end{cases}$$
$$L = x_2 + x_3.$$

Cuando $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, las variables básicas resultan: $x_1 = 1$, $x_4 = 2$, o sea, tenemos la primera solución posible (1, 0, 0, 2) y $L_1 = 0$. El incremento de L se puede realizar aumentando x_3 hasta 1. Entonces para $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ los valores de las variables básicas son $x_1 = 0$, $x_4 = 4$. La nueva solución posible es (0, 0, 1, 4) y $L_2 = 1$.

Expresamos ahora x_3 y x_4 por x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2, \end{cases}$$
$$L = 1 - x_1 + 2x_2.$$

El incremento de L es posible aumentando x_2. Sin embargo, el aumento de x_2 no es limitado a juzgar por el último sistema de ecuaciones. De este modo, L tomará valores positivos, cada vez más grandes, o sea, $L_{\max} = +\infty$.

Así, pues, la forma de L no está acotada superiormente y por eso la solución óptima no existe.

1714. Se da el sistema de limitaciones: $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$, $x_2 + 2x_4 = 1$ y la forma lineal $L = 5x_1 - x_3$. Hallar la solución óptima que minimice la forma lineal.

Resolución. Este problema podría reducirse al de determinación del máximo de la función $L_1 = -L$, o sea, $L_1 = -5x_1 + x_3$, pero esto no es obligatorio. Razonando análogamente al problema anterior, se puede resolverlo sin reducirlo a un problema de maximización. El sistema dado de ecuaciones es compatible, ya que los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada son los mismos e iguales a 2. Por lo tanto el sistema de ecuaciones puede reescribirse, por ejemplo, así:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_4. \end{cases}$$
$$L = 10 - 11x_3 + 15x_4.$$

Aquí como variables básicas se toman x_1 y x_2 y como variables independientes x_3 y x_4. Si $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, la primera solución básica es $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, o bien (2, 1, 0, 0) y $L_1 = 10$. La disminución de la forma lineal de L se provoca con el aumento de x_3, ya que en la forma de L, x_3 tiene coeficiente negativo, con ello el aumento de x_3 es posible sólo hasta 1, mientras que permanece el valor de $x_4 = 0$. Sí tomamos $x_3 = 1$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, o bien (0, 1, 1, 0) que es la segunda solución básica para la cual $L_2 = -1$.

Expresamos x_2 y x_3 por medio de nuevas variables independientes x_1 y x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_4, \\ x_3 = 1 - (1/2)\,x_1 + (3/2)\,x_4, \end{cases}$$
$$L = -1 + (11/2)\,x_1 - (3/2)\,x_4.$$

Ahora la disminución del valor de la forma de L depende del aumento de x_4 hasta $x_4 = 1/2$ (aquí x_2 es no negativa), mientras que permanece el valor de $x_1 = 0$ queda. En este caso tenemos una nueva solución posible $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7/4$, $x_4 = 1/2$, o bien (0, 0, 7/4, 1/2) para la cual $L = -7/4$.

Expresamos x_3 y x_4 mediante las variables independientes x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 7/4 - (1/2)\,x_1 - (3/4)\,x_2, \\ x_4 = 1/2 - (1/2)\,x_2, \end{cases}$$
$$L = -7/4 + (11/2)\,x_1 + 3/4x_2.$$

Puesto que la disminución ulterior del valor de la forma de L es imposible debido a la positividad de los coeficientes de x_1 y x_2, la solución posible del problema (0, 0, 7/4, 1/2) es óptima. El valor mínimo de L es igual a $-7/4$).

1715. Maximizar la forma lineal de $L = 2x_1 - x_4$ para el siguiente sistema de limitaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ \qquad x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 8. \end{cases}$$

Resolución. Puesto que el sistema de limitaciones es mixto, reduzcámoslo a un sistema de ecuaciones, introduciendo una nueva variable no negativa x_5 en el primer miembro de la segunda condición, con coeficiente negativo, y x_6 en la tercera condición, con coeficiente positivo. Entonces obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_32 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 8. \end{cases}$$

Reducimos este sistema a la base unitaria, escogiendo como variables básicas x_1, x_2, x_3 (en virtud del hecho de que el rango de la matriz del sistema es igual a 3):

$$x_1 = 15 + 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 5 - 2x_4 + x_5, \quad x_3 = 28 - x_6. \qquad (*)$$

Entonces la forma lineal será de $L = 30 + 3x_4 - 2x_5$. Cuando $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, entonces las variables básicas tienen los valores: $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 28$, o sea, la primera solución posible es (15, 5, 28, 0, 0, 0); con ello $L_1 = 30$.

Para incrementar el valor de L es necesario aumentar x_4, ya que esta variable entra en la expresión de L con un coeficiente negativo. El aumento de x_4 es posible hasta $x_4 = 5/2$ lo que se ve de la segunda condición del sistema de restricciones (*). Cuando $x_4 = 5/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, entonces los valores de las variables restantes son los siguientes: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 28$, o sea, obtendremos la segunda solución posible (20, 0, 28, 5/2, 0, 0) y la función lineal L tendrá la forma $L = 75/2 - (3/2)\,x_2 - (1/2)\,x_5$ y para la segunda solución posible su valor es igual a $L_2 = 75/2$.

Ahora, puesto que los coeficientes de las variables en L son negativos, el aumento del valor de L es imposible. Por consiguiente, $L_{max} = 75/2 = 37{,}5$.

1716. Para fabricar los artículos de dos tipos hay 100 kg de metal. Para producir un artículo del tipo I se consumen 2 kg de metal y para producir un artículo del tipo II se gastan 4 kg. Hacer un plan de producción que permita el mayor ingreso de dinero por la venta de los artículos, si el precio de venta de un artículo del tipo I es de 3 rublos y de un artículo del tipo II es de 2 rublos, con ello se requiere elaborar no más de 40 artículos del tipo I y no más de 20 artículos del tipo II.

Resolución. Sean fabricados x_1 artículos del tipo I y x_2 artículos del tipo **II**. Entonces tenemos las siguientes restricciones para las variables x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 40, \\ x_2 \leqslant 20, \\ 2x_1 + 4x_2 = 100. \end{cases}$$

La función objetivo tiene la forma de $L = 3x_1 + 2x_2$. Transformamos el sistema mixto de restricciones en otro de restricciones en forma de ecuaciones, introduciendo las nuevas variables x_3 y x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = 50. \end{cases}$$

El rango de la matriz de este sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es igual a 3. Tomamos como básicas las variables x_1, x_2, x_3 y pasemos a la base unitaria

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 2x_4, \\ x_2 = 20 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4. \end{cases}$$

La primera solución posible se obtiene cuando $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$. Para estos valores de las variables $L = 70$. Se puede incrementar valor de la función objetivo aumentando x_4 hasta $x_4 = 15$, a juzgar por la tercera ecuación. Entonces para $x_4 = 15$, $x_1 = 40$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, tenemos $L = 130$. La segunda solución posible es $(40, 5, 0, 15)$; $x_1 = 40 - x_3$, $x_2 = 5 + (1/2)\,x_3$, $x_4 = 15 - (1/2)\,x_3$, $L = 130 - 2x_3$. El coeficiente de x_3 en la función objetivo es negativo y por eso el aumento ulterior de L es imposible. Por lo tanto, la solución óptima es $x_1 = 40$, $x_2 = 5$ y $L_{\max} = 130$.

2. Tablas simplex. Reducimos el sistema de restricciones a la base unitaria:

$$\begin{gathered} x_1 + \ldots + a_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i + \ldots + a_{i,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \ldots + a_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{gathered}$$

y L a la forma

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0. \tag{1}$$

La igualdad (1) la llamamos *expresión reducida* (a las variables independientes) de la función L, y los coeficientes γ_j los denominaremos *estimaciones* (índices) de las variables independientes respectivas x_j.

1. Se escoge la columna resolutiva a_p partiendo de la condición: estimación $\gamma_p < 0$ y al menos un elemento $a_{ip} > 0$.

2. Se escoge la q-ésima fila resolutiva partiendo de la condición

$$b_q/a_{qp} = \min\,\{b_i/a_{ip}\} \text{ para } a_{ip} > 0.$$

3. Se efectúa el recálculo de los elementos de la q-ésima fila resolutiva por la fórmula

$$a'_{qk} = a_{qk}/a_{qj}, \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

4. Se calculan los elementos de las demás filas (para $k \neq p$) por la fórmula $a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} \cdot a_{ip}$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, r)$.

En forma de tabla estos datos pueden ser representados así:

Variables básicas	Términos independientes	x_1	...	x_l	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,r+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}
....	....	...	...	...	...	...	....	...	......	...	......
x_l	b_l	0	...	1	...	0	$a_{l,r+1}$	...	a_{lj}	...	a_{ln}
....	....	...	...	...	...	...	....	...	......	...	......
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	a_{rj}	...	a_{rn}
L	γ_0	0	...	0	...	0	γ_{r+1}	...	γ_j	...	γ_n

Conviene tener en cuenta el teorema principal del método simplex que citamos sin demostración.

Teorema. *Si después de efectuada la iteración de turno:*

1) *se encuentra al menos una estimación negativa y en cada columna con tal estimación existe al menos un elemento positivo, o sea,* $\gamma_k > 0$ *para ciertas* k *y* $a_{ik} > 0$ *para las mismas* k *y alguna* i, *entonces se puede mejorar la solución realizando la iteración siguiente:*

2) *se encuentra al menos una estimación negativa cuya columna no contiene elementos positivos, o sea,* $\gamma_k < 0$, $a_{ik} < 0$ *para cierta* k *y para todas las* i, *entonces la función* L *no está limitada en el campo de soluciones posibles* ($L_{\text{máx}} \to \infty$);

3) *todas las estimaciones resultan no negativas, o sea* $\gamma_k \geqslant 0$ *para todas las* k, *entonces se ha obtenido la solución óptima.*

1717. Hallar el valor mínimo de la función lineal $L = 7x_1 + 5x_2$ sobre el conjunto de soluciones no negativas del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 4. El rango de la matriz ampliada también es igual a 4. Por consiguiente, cuatro variables (básicas) se pueden expresar por dos variables (independientes), o sea,

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

A propósito, la forma lineal de $L = 7x_1 + 5x_2$ o $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$ ya está expresada mediante estas mismas variables independientes. Tenemos la tabla inicial (tabla 1).

Tabla 1

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	0	−7	−5	0	0	0	0

Aclaramos si hay estimaciones negativas en la última fila (de índice). Hay dos números así: −7 y −5. Tomamos, por ejemplo, −5 y examinamos la columna para x_2, en esta columna tenemos tres elementos positivos 3, 1, 3.

Tabla 2

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4	2	0	1	0	−1	0
x_4	8	2	0	0	1	−1/3	0
x_2	5	0	1	0	0	1/3	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	25	−7	0	0	0	5/3	0

Dividimos por estos números los términos independientes respectivos: 19/3, 13/1, 15/3; entre los cocientes obtenidos el menor es 15/3. Por lo tanto, de resolutivo sirve el elemento 3 que está en la intersección de la fila de x y la columna de x_2. Destacamos esta fila y esta columna en cuadros. La nueva base se compone de x_3, x_4, x_2, x_6. Para hacer la siguiente tabla multiplicamos por 1/3 la fila encuadrada de la tabla 1 para lograr en el lugar del elemento resolutivo la unidad, y la fila obtenida de este modo la escribimos en el lugar de la anterior. Adicionamos a cada una de las demás filas la fila recién obtenida multiplicada por un número tal, que en las casillas de la columna de x_2 queden ceros y escribimos las líneas transformadas en el lugar de las anteriores. Así se finaliza la iteración I.

Ahora todos los razonamientos se repiten conforme a la tabla 2, o sea, efectuamos la iteración II. El nuevo elemento resolutivo que está en la intersección de la fila de x_3 y la columna para x_1 es 2. Pasamos a la tabla siguiente.

Tabla 3

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	1/2	0	—1/2	0
x_4	4	0	0	—1	1	2/3	0
x_2	5	0	1	0	0	1/3	0
x_6	12	0	0	—3/2	0	3/2	1
L	39	0	0	7/2	0	—11/6	0

Tabla 4

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	—1/4	3/4	0	0
x_5	6	0	0	—3/2	3/2	1	0
x_2	3	0	1	1/2	—1/2	0	0
x_6	3	0	0	3/4	—9/4	0	1
L	50	0	0	3/4	11/4	0	0

Repetimos lo mismo conforme a la tabla 3. Aquí de resolutivo **sirve el** elemento 2/3 que está en la intersección de la fila de x_4 con la columna de x_5. Pasamos a la tabla 4. Puesto que en la fila del índice no hay estimaciones negativas, hemos obtenido el plan óptimo (5, 3, 0, 0, 6, 3) y el valor máximo de la forma lineal de L es $L_{\max} = 50$.

Hallar les soluciones óptimas no negativas que minimicen la forma lineal:

1718. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$
$L = x_1 - x_3.$

1719. $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4, \end{cases}$
$L = x_1 + x_2.$

1720. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$
$L = 2x_3 - x_2.$

1721. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900, \end{cases}$
$L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3.$

1722. $\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$
$L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6.$

Hallar las soluciones óptimas no negativas que maximicen la forma lineal:

1723. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 8, \end{cases}$
$L = 2x_1 + x_4.$

1724. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leqslant -1, \end{cases}$
$L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3.$

1725. La capacidad de producción de un taller de montaje es de 120 artículos del tipo A y 360 artículos del tipo B al día. El control técnico deja pasar por día 200 artículos de uno u otro tipo (indistintamente). Los artículos del tipo A son cuatro veces más caros que los del tipo B.Se planificará la producción de los artículos acabados de modo que permita a la empresa obtener los máximos beneficios.

1726. Para fabricar los artículos de dos tipos el depósito puede entregar 80 kg de metal, como máximo, con ello para confeccionar un artículo del tipo I se consume 2 kg de metal y para confeccionar un artículo del tipo II, 1 kg. Hace falta planificar la producción de modo que permita obtener los máximos beneficios, fabricando no más de 30 artículos del primer tipo y no más de 40 artículos del segundo tipo, con ello un artículo del tipo I cuesta 5 rublos y un artículo del tipo II, 3 rublos.

1727. Para alimentar los animales se utilizan dos especies de forraje; el precio de 1 kg de forraje de la especie I es de 5 kopek y de forraje de la especie II, 2 kopek. Cada kilogramo de forraje de la especie I contiene 5 unidades de sustancia nutritiva A, 2,5 unidades de sustancia nutritiva B y 1 unidad de sustancia nutritiva C y cada kilogramo de forraje de la especie II contiene 3, 3, y 1,3 unidades, respectivamente. ¿Qué cantidad de forraje de cada especie se necesita *consumir cada día para que los gastos de alimentación sean mínimos* si la ración diaria prevé no menos de 225 unidades nutritivas del tipo A, no menos de 150 del B y no menos de 80 del C?

3. Noción de solución degenerada. Al examinar el método simplex se suponía que $b_i > 0$ (véase la pág. 331) tanto en el sistema inicial como en los *sistemas que se obtenían después de las iteraciones de turno. Sin embargo, si en* algunas ecuaciones los términos independientes $b_i = 0$, entonces en la solución de apoyo correspondiente a este sistema las variables básicas respecto a las cuales estas ecuaciones están resueltas toman el valor nulo. La solución de apoyo en la cual al menos una de las variables básicas tome el valor nulo se llama *solución degenerada* y un problema de programación lineal que tenga al menos una solución degenerada se denomina *problema degenerado*. Empleando en este caso las iteraciones sucesivas, podemos regresar a un juego de variables básicas e independientes cerrado que hemos encontrado antes, o sea, se manifiestan *los ciclos* en el esquema de cálculo. Citamos la regla para eliminar los ciclos cerrados (no exponemos la argumentación teórica de esta regla que es una cuestión especial del llamado problema de degeneración).

Regla. *Si en una etapa cualquiera de cálculo surge una indeterminación en la selección de la línea resolutiva, o sea, aparecen varias relaciones mínimas iguales* b_i/a_{ip}, *entonces conviene escoger la fila para la cual la relación entre los elementos de la siguiente columna y la resolutiva es mínima. Si en este caso vuelven a aparecer relaciones mínimas iguales, entonces se hacen las relaciones de los elementos de la columna siguiente y así hasta que la fila resolutiva se determina univocamente.*

1728. Maximizar la forma lineal de $L = 4x_5 + 2x_6$ para las restricciones: $x_1 + x_5 + x_6 = 12$, $x_2 + 5x_5 - x_6 = 30$, $x_3 + x_5 - 2x_6 = 6$, $2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

Resolución. Al sistema inicial le corresponde la solución de apoyo (12, 30-6, 9, 0, 0) y el valor de $L = 0$. A continuación se expone la sucesión de iteraciones del método simplex:

Tabla inicial

x_i	b_i					4	2	b_i/a_{ip}	a_{i1}/a_{ip}
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	12	1				1	1	12	
x_2	30		1			5	—1	6	—1/5
x_3	6			1		1	—2	6	—2
x_4	18				2	3	—2	6	—2/3
L	0					—4	—2		

Iteración I

x_1	6	1		—1			3	2	
x_2	0		1	—5			9	0	**—5/9**
x_5	6			1		1	—2		
x_4	0			—3	2		4	0	**—3/4**
L	24			4			—10		

Después de efectuada la iteración I hemos obtenido el sistema resuelto con respecto a las variables básicas x_1, x_2, x_4, x_5 al cual corresponde la solución de apoyo (6, 0, 0, 0, 6, 0) y el valor de $L_1 = 24$. Las iteraciones II y III no

Iteración II

x_1	6	1		5/4	—3/2			24/5	
x_2	0		1	7/4	—9/2			0	
x_5	6			—1/2	1	1			
x_6	0			—3/4	1/2				
L	24			—7/2	5				

Iteración III

x_1	6	1	—5/7		12/7				
x_3	0		4/7	1	—18/7				
x_5	6		2/7		—2/7	1			
x_6	0		3/7		—10/7		1		
L	24		2		—4				

cambian la resolución de apoyo ni el valor de $L_2 = L_3 = 24$ y sólo la iteración IV brinda la solución óptima $(0, 0, 9, 7/2, 7/5)$ y $L_{max} = 38$. En el esquema dado de cálculos no ha aparecido el ciclo cerrado, aunque durante las tres iteraciones «no nos hemos movido del sitio» y sólo se cambiaron las variables básicas e independientes. En el ejemplo examinado en la tabla inicial hay tres relaciones mínimas iguales: $b_2/a_{25} = b_3/a_{35} = b_4/a_{45} = 6$. Por eso, valiéndonos de la regla de eliminación de un posible ciclo cerrado, tomamos las relaciones de los elementos de la columna que sigue a la columna independiente: $a_{26}/a_{25} = -1/5$, $a_{36}/a_{35} = -2$, $a_{46}/a_{45} = -2/3$. La relación $a_{36}/a_{35} = -2$ es la menor. Por consiguiente, la tercera fila debe ser tomada en calidad de resolutiva, etc. (véanse las tablas).

Iteración IV

x_4	7/2	7/12	−5/12		1				
x_3	9	3/2	−1/2	1					
x_5	7	1/6	1/6			1			
x_6	5	5/6	−1/6				1		
L	38	7/3	1/3						

1729. Maximizar la función lineal $L = 2x_1 + 4x_2$ para las limitaciones: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $-x_1 + (3/2)\,x_2 + x_4 = 9$, $-x_1 + 5x_2 + x_5 = 30$, $-x_1 + x_2 + x_6 = 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

§ 4. Problemas duales

A todo problema de programación lineal se le puede poner en correspondencia otro problema relacionado con él de un modo determinado, llamado *dual* con respecto al primero.

Por ejemplo, si el problema inicial (problema I) de programación lineal es el de *minimizar* la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ cuando se dan las restricciones en forma de desigualdades

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

a condición de no negatividad de x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces con este problema está relacionado el problema dual (problema I′) que requiere *maximizar* la función lineal $T = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m$ con las restricciones:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leqslant c_n \end{cases}$$

y la no negatividad de $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Notemos que en el problema I y en el problema dual I′ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

compuestas por los coeficientes de las variables se obtienen una de la otra por medio de la transposición. En los segundos miembros del sistema de restricciones de cada problema están los coeficientes de la función lineal tomada del otro problema. En el sistema de restricciones del problema I (minimización) todas las desigualdades son del tipo «$\geqslant$» y en el sistema de restricciones del problema I′ (maximización) todas las desigualdades son del tipo «$\leqslant$». La noción de dualidad es recíproca, o sea, si el problema I′ se escribe en la forma análoga a la del problema I, entonces dual respecto a él será el problema inicial I. Por eso los problemas I y I′ se llaman *recíprocamente duales* o *recíprocamente conjugados*. Se demuestra que $L_{\min} = T_{\max}$ así como que la condición necesaria y suficiente de óptimo de las soluciones de un par cualquiera de problemas duales es la igualdad $L(\overline{x}) = T(\overline{y})$, donde $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son soluciones posibles de los problemas I e I′.

1730. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) a condición de que $x_1 + 2x_2 \geqslant 4$, $x_1 - x_2 \geqslant -1$, con la minimización de la función lineal $L = 3x_1 + 2x_2$.

Problema dual (I′): hallar los valores no negativos (y_1, y_2) a condición de que $y_1 + y_2 \leqslant 3$, $2y_1 - y_2 \leqslant 2$, con la maximización de la función lineal $T = 4y_1 - y_2$.

Resolución. Damos la solución geométrica de estos problemas. Construimos el sistema de limitaciones de los problemas I y I′. En el punto P (2/3; 5/3) se

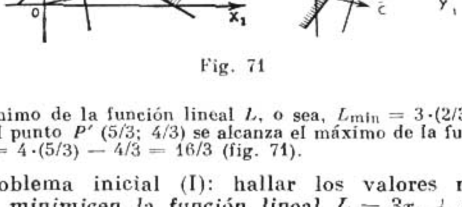


Fig. 71

alcanza el mínimo de la función lineal L, o sea, $L_{\min} = 3\cdot(2/3) + 2\cdot(5/3) = 16/3$ y en el punto P' (5/3; 4/3) se alcanza el máximo de la función lineal T, o sea, $T_{\max} = 4\cdot(5/3) - 4/3 = 16/3$ (fig. 71).

1731. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que minimicen la función lineal $L = 3x_1 + 2x_2$, dado el sistema de restricciones $7x_1 + 2x_2 \geqslant 14$, $4x_1 + 5x_2 \geqslant 20$. Formular el problema dual y resolverlo.

1732. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que maximicen la función lineal $L = 5x_1 + 4x_2$ para el sistema de restricciones $4x_1 + 3x_2 \leqslant 24$, $3x_1 + 4x_2 \leqslant 24$. Formular el problema dual y resolverlo.

1733. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que minimicen la función lineal $L = 3x_1 + 3x_2$ para el sistema de restricciones $5x_1 - 4x_2 \geqslant -2$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 6$. Escribir el problema dual y resolverlo.

§ 5. El problema del transporte

Uno de los problemos típicos de programación lineal es el llamado *problema del transporte*. Aparece al planificar los tráficos más racionales de mercancías. En unos casos esto significa la determinación de un plan de tráfico tal, que los gastos de transporte sean mínimos y en otros casos tiene mayor importancia la ganancia del tiempo. El primer problema ha recibido el nombre de *problema de transporte según el criterio de costo* y el segundo, *problema de transporte según el criterio de tiempo*.

El primer problema es un caso particular del problema de programación lineal y puede resolverse por el método simplex. No obstante, en virtud de su particularidad, se resuelve más sencillamente.

Supongamos que en p lugares de expedición se encuentran $a_1, a_2, \ldots, a_p$ unidades de mercancías homogéneas que deben ser enviadas a q consumidores en cantidades de $b_1, b_2, \ldots, b_q$ unidades. Se dan los costos c_{ik} de transporte de una unidad de mercancía del i-ésimo lugar de expedición al k-ésimo lugar de consumo. Designamos por $x_{ik} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$ la cantidad de unidades de mercancía que se transporta del i-ésimo almacén al k-ésimo consumidor; entonces las variables x_{ik} deben satisfacer las restricciones siguientes: 1) $\sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$; 3) $x_{ik} \geqslant 0$. Los gastos totales para el transporte son iguales a $L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{pq}x_{pq}$. Por lo tanto, es necesario hallar pq variables x_{ik} que satisfagan las condiciones indicadas y minimicen la función objetivo L.

La resolución de tal problema se divide en dos etapas:

1) determinación de la solución de apoyo inicial;

2) construcción de las iteraciones sucesivas, o sea, aproximación a la solución óptima.

Determinación de la solución de apoyo inicial. Supongamos que tenemos la tabla de los datos iniciales del problema (véase la pág. 345). Vamos a construir la solución de apoyo inicial por la llamada regla de «ángulo noroeste».

Llenamos la tabla indicada a partir del ángulo superior izquierdo, moviéndonos luego por la fila hacia la derecha, o bien por la columna hacia abajo. En la casilla (1, 1) escribamos el menor entre los números a_1 y b_1, o sea, $x_{11} = \text{mín}\ \{a_1, b_1\}$.

Si $a_1 > b_1$, entonces $x_{11} = b_1$ y la primera columna está «cubierta», o sea, las necesidades del primer consumidor están satisfechas por completo. Nos movemos luego por la primera fila, escribiendo en la casilla vecina (1, 2) el menor entre los números $a_1 - b_1$ y b_2, o sea, $x_{12} = \text{mín}\ \{a_1 - b_1, b_2\}$.

Pero si $b_2 > a_1$, entonces «se cubre» análogamente la primera fila y luego pasamos al llenado de la casilla vecina (2, 1) en la cual escribimos $x_{21} = \text{mín}\ \{a_2, b_1 - a_1\}$. Continuamos este proceso hasta que en una etapa dada, queden agotados los recursos a_p y satisfechas las necesidades b_q.

1734. En dos lugares de expedición A y B se encuentran 150 y 90 t de combustible, respectivamente. Es necesario enviar 60, 70 y 110 t de combustible a los lugares 1, 2 y 3, respectivamente. Los costos de

b_k \ a_i	b_1	b_2	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_q
a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	$\ldots$	x_{1k} c_{1k}	$\ldots$	x_{1q} c_{1q}
a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	$\ldots$	x_{2k} c_{2k}	$\ldots$	x_{2q} c_{2q}
$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$
a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	$\ldots$	x_{ik} c_{ik}	$\ldots$	x_{iq} c_{iq}
$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$
a_p	x_{p1} c_{p1}	x_{p2} c_{p2}	$\ldots$	x_{pk} c_{pk}	$\ldots$	x_{pq} c_{pq}

transporte de una tonelada de combustible del lugar A a los lugares 1, 2, 3 son de 6, 10 y 4 rublos, y los costos de transporte de una tonelada de combustible del lugar B a los lugares mencionados son de 12, 2 y 8 rublos, respectivamente. Confeccionar el plan óptimo de tráfico del combustible de modo que la suma total de gastos de transporte sea mínima.

Resolución. Escribimos los datos iniciales en la tabla 1. Comenzamos el llenado a partir de la casilla (1, 1): $x_{11} = \min\{150, 60\} = 60$, la primera co-

Tabla 1

	b_k \ a_i	*1*	*2*	*3*
		60	70	110
A	150	60 [6]	70 [12]	20 [4]
B	90	[12]	[2]	90 [8]

lumna queda cubierta. Pasamos a la casilla (1, 2): $x_{12} =$ mín $\{150 - 60, 70\} = 70$, la segunda columna queda cubierta; luego pasamos a la casilla (1, 3): $x_{13} =$ mín $\{150 - 60 - 70, 110\} = 20$. Como en la tercera columna resulta el resto igual a 90, pasamos al llenado de la casilla (2, 3) en la cual escribimos $x_{23} =$ mín $\{90, 90\} = 90$. Puesto que los restos en la línea y la columna son iguales a cero, la solución inicial de apoyo está construida. A este plan le corresponden los gastos cuya cantidad $L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860$ rublos.

En la regla de «ángulo del noroeste» no se tiene en cuenta la cantidad de gastos c_{ik} y por eso la solución inicial de apoyo puede distinguirse mucho de la óptima. Se emplea también el procedimiento de «elemento mínimo» en el cual se atiende a la cantidad c_{ik}. En este caso la construcción de la solución inicial de apoyo se empieza de la casilla en que la cantidad de c_{ik} es mínima, en el ejemplo dado la construcción se comienza a partir de la casilla (2, 2) en que $c_{22} = 2$(tabla 2). En esta casilla escribamos $x_{22} =$ mín $\{a_2, b_2\} =$mín $\{90, 70\} = 70$.

Tabla 2

	a_i \ b_k	1: 60	2: 70	3: 110	Resto
A	150	60 (6)	(10)	90 (4)	60,0
B	90	(12)	70 (2)	20 (8)	20,0
	Resto	0	0	20,0	

Escribimos los restos quedados en la línea y la columna en las casillas respectivas de la línea y la columna de los restos. La columna b_2 está cubierta. Ahora pasamos a la casilla (1, 3), ya que después de $c_{22} = 2$ $c_{13} = 4$ es la cantidad mínima. Escribimos en la casilla (1, 3) $x_{13} =$ mín $\{a_1 - b_1, b_3\} =$ mín $\{150 - 60, 110\} = 90$. Luego pasamos a la casilla (1, 1): $x_{11} =$ mín $\{a_1, b_1\} =$ mín $\{150, 60\} = 60$. Y, por último, pasamos a la casilla (2, 3) en la cual escribamos $x_{23} =$ mín $\{a_2 - b_2, b_3\} =$ mín $\{90 - 70, 110\} = 20$.

Aplicando esta regla, hemos obtenido otra variante de solución inicial de apoyo, en la cual los gastos $L = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020$ rublos, o sea, la suma de gastos es más próxima al plan óptimo.

2. Construcción de las iteraciones sucesivas. Obtenida la solución inicial de apoyo, pasamos ahora a la construcción de nuevas soluciones de apoyo que se mejoren sucesivamente; para eso aplicamos el método de potenciales.

Pues bien, después de construida la solución inicial de apoyo todas las variables quedan divididas en dos grupos: x_{kl}, o sea, las variables básicas y x_{pq}, es decir, las variables libres y las funciones lineales del costo de transporte se expresarán por las variables independientes del modo siguiente:

$$L = \sum_{pq} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \qquad (1)$$

Para determinar los coeficientes γ_{pq} de las variables independientes, ponemos en correspondencia a cada lugar de expedición A_i cierta cantidad u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) que llamamos *potencial* del punto A_i y a cada lugar de destino B_j le asignamos en correspondencia la cantidad v_j, o sea, el potencial del lugar B_j. Relacionamos estas cantidades mediante la igualdad $u_k + v_l = c_{kl}$, donde c_{kl} es el costo de transporte de una tonelada de mercancías del lugar A_k al lugar B_l. Se demuestra que el conjunto de ecuaciones $u_k + v_l = c_{kl}$, escritas para todas las variables básicas, constituye un sistema conjunto de ecuaciones lineales, con ello el valor de una de las variables puede asignarse arbitrariamente y entonces los valores de las demás variables se determinan unívocamente a partir del sistema. Designamos para las variables independientes la suma de potenciales respectivos por c'_{pq}, o sea, $u_p + v_q = c'_{pq}$ y la llamamos *costo indirecto* (a distinción del costo dado c_{pq}). Entonces los coeficientes de las variables libres se determinan en la relación (1) con ayuda de la igualdad $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$.

Si todas las cantidades γ_{pq} son no negativas, la solución inicial es óptima. Pero si entre ellas las hay negativas, entonces pasamos a la base siguiente por medio del aumento del término con coeficiente negativo, dejando iguales a cero las otras variables.

Valgámonos de las nociones generales expuestas y continuemos la resolución del problema 1734. Hemos obtenido la solución inicial de apoyo (siguiendo la regla de «elemento mínimo»): $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$, $L = 1020$. Para determinar los potenciales es necesario resolver el sistema

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_2 = c_{22} = 2,$$
$$u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Asignamos arbitrariamente el valor a una de las incógnitas, por ejemplo, $u_1 = 1$. Entonces $v_1 = 5$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$, $v_2 = -3$. Luego calculamos los costos indirectos c'_{pq}:

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = -2, \quad c'_{21} = u_2 + v_1 = 10.$$

Determinamos ahora las diferencias $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12,$$
$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Por consiguiente, la expresión de L por las variables independientes tiene la forma de $L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$. En el segundo miembro entre los coeficientes de las variables no los hay negativos. Esto quiere decir que la solución inicial de apoyo es óptima.

De este modo la regla del «elemento mínimo» brinda inmediatamente la solución óptima. Vamos a resolver ahora este problema a condición de que la solución inicial se haya obtenido por la regla de «ángulo del noroeste», o sea, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 70$, $x_{13} = 20$, $x_{23} = 90$, $L = 1860$.

Para determinar los potenciales hace falta resolver el sistema

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_2 = c_{12} = 10,$$
$$u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Haciendo $u_1 = 1$, obtenemos $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$.

Hallamos los costos indirectos c'_{pq}:

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10, \quad c'_{22} = u_2 + v_2 = 14.$$

Calculamos ahora las diferencias $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2, \quad \gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12$$

Por lo tanto, la expresión de L por las variables independientes tiene la forma de $L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$. En el segundo miembro entre los coeficientes de las variables hay uno negativo, adjunto a x_{22}; por consiguiente, *intentamos disminuir L aumentando x_{22} (conservando el valor cero de x_{21})*. Hacemos $x_{22} = \lambda$. Puesto que las sumas de valores de las incógnitas en las filas y columnas deben quedar invariables, hay que efectuar el siguiente recálculo de balance:

60	$70 - \lambda$	$20 + \lambda$
	λ	$90 - \lambda$

La adición de λ a x_{22} se compensa por la sustracción de λ a partir de x_{12} y esto, a su vez, por la adición de λ a x_{13}, etc. hasta que regresamos a x_{22}. Recorriendo las casillas por la línea quebrada punteada en uno de los vértices de la cual se encuentra la variable independiente x_{22} y en los demás vértices, variables básicas (no es obligatorio que estén presentes todas), hemos obtenido el llamado *ciclo de recálculo* (la línea quebrada se denomina *ciclo*) que responde a la casilla libre de x_{22}. Como se ve en la tabla, para la no negatividad de las variables λ se puede aumentar hasta $\lambda = 70$; entonces obtendremos la segunda solución de apoyo:

60	0	90
0	70	20

o sea, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$.

Para esta solución el valor de la función $L = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$, o sea hemos obtenido la solución óptima (a juzgar por la solución precedente)

De este modo las reglas de cálculos por el método de potenciales se reducen a lo siguiente:

1. Se determinan los potenciales u_k y v_l de todos los lugares de expedición A_k y de destino B_l.

2. Se escoge una variable libre cualquiera para la cual la suma de potenciales es rigurosamente mayor que el costo respectivo lo que corresponde al elemento que tiene un coeficiente negativo de la variable independiente en el segundo miembro de la función L.

3. Para la variable escogida en el punto 2 se determina el ciclo de recálculo que le corresponde y se efectúa el desplazamiento según este ciclo. Este desplazamiento conduce a una nueva solución posible.

4. Las operaciones 1 a 3 indicadas se repiten hasta que se obtenga la base óptima o sea los coeficientes no negativos de las variables libres en el segundo miembro de la función lineal L.

1735. Dos depósitos A y B contiene cada uno 90 t de combustible. El transporte de una tonelada de combustible procedente del almacén A a los lugares 1, 2 y 3 cuesta 1, 3 y 5 rublos, respectivamente, mientras que el transporte de una tonelada de combustible procedente del almacén B a los mismos lugares vale 2, 5 y 4 rublos, respectivamente. Se requiere suministrar a cada lugar una misma cantidad de toneladas de combustible. Determinar un plan de tráfico tal que los gastos de transporte sean mínimos.

1736. En reserva de tres estaciones ferroviarias A, B y C hay 60, 80 y 100 vagones, respectivamente. Hacer el plan óptimo de traslado de estos vagones a cuatro lugares de carga de granos si para el lugar N° 1 se necesitan 40 vagones; para el lugar N° 2, 60; para el lugar N° 3, 80, y para el lugar N° 4, 60 vagones. Los gastos de traslado de un vagón desde la estación A a los lugares indicados son iguales a 1, 2, 3 y 4 rublos, desde la estación B son iguales a 4, 3, 2 y 0 rublos y desde la estación C son iguales a 0, 2, 2 y 1 rublos, respectivamente.

1737. En una fábrica hay tres talleres A, B y C y cuatro almacenes N° 1, 2, 3 y 4. El taller A produce 30 mil piezas de artículos; el B, 40 mil; y el taller C 20 mil piezas. Para el mismo período de tiempo el rendimiento de los almacenes se caracteriza por los índices siguientes: el almacén N° 1, 20 mil piezas; el N° 2, 30 mil; el N° 3, 30 mil, y el almacén N° 4, 10 mil piezas. Los gastos de transporte de 1000 piezas desde el taller A a los almacenes N°N° 1, 2, 3 y 4 son iguales a 2, 3, 2 y 4 rublos; desde el taller B: 3, 2, 5 y 1 rublo, y desde el taller C: 4, 3, 2 y 6 rublos, respectivamente. Hacer un plan de tráfico de los artículos tal que permita reducir al mínimo los gastos de transporte de 90 mil piezas.

1738. En tres almacenes A, B y C hay 10, 15 y 25 t de granos seleccionados, respectivamente, que se deben suministrar a cuatro lugares: al lugar N° 1, 5 t, al N° 2, 10 t; al N° 3, 20 t, y al lugar N° 4, 15 t. Los gastos de transporte de una tonelada desde el almacén A a los lugares indicados son iguales a 8, 3, 5 y 2 rublos; desde el almacén B: 4, 1, 6 y 7 rublos, y desde el almacén C: 1, 9, 4 y 4 rublos, respectivamente. Hacer el plan óptimo de tráfico de granos a los cuatro lugares, de modo que minimice los gastos de transporte.

Respuestas

Capítulo I

4. 1) 8; 2) 3. 5. 1) 1/2; 2) $-9/4$. 6. $M(7)$. 7. $C(1)$ $D(3)$. 8. $C(-9)$ $D(-1)$ 16. 1) 13; 2) 3. 19. 5. 20. $(-1; 8)$ $(1; 9)$ $(3; 10)$. 21. $S = 0$ o sea los puntos A, B, C están en una misma recta. 22. $D(17; 12)$. 23. $C(-10; -7)$. 24. $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$. 25. 24 unidades cuadradas. 29 $A\ (4; \pi/6)$; $B\ (3; -\pi/2)$; $C\ (4\sqrt{2}; 3\pi/4)$; $D\ (2; -\pi/4)$; $E\ (2\sqrt{2}; 4\pi/3)$; $F\ (7; \pi)$. 30. $A\ (0; 10)$, $B\ (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $C\ (0; 0)$; $D\ (\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$; $E\ (-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$, $F\ (-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$. 31. $\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$. 32. 5. 33. $M_1\ (\rho; -\theta)$. 34. $M_1\ (\rho; \pi + \theta)$. 35. 1) $(3; 7\pi/6)$, $(5; -\pi/3)$ y $(2; 5\pi/6)$; 2) $(3; -\pi/6)$, $(5; -2\pi/3)$ y $(2; \pi/6)$. 36. $M_1\ (\rho; \pi - \theta)$. 44. $y = 2x - 1{,}5$. 45. La bisectriz de los ángulos I y III de las coordenadas. 46. La bisectriz de los ángulos II y IV de las coordenadas. 47. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. 48. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$. 49. $\rho = a$. 50. $\theta = \alpha$. 51. $\rho = a\cos\theta$. 57. La recta $y = 2x$. 58. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (la curva se llama *elipse*). 59. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (la curva se llama *hipérbola*). 60. El segmento de la recta (AB), donde $A\ (1; 0)$, $B\ (0; 1)$. 61. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 62. $x = a\,(t \operatorname{sen} t + \cos t)$, $y = a\,(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ (la curva se llama *evolvente del círculo*). 67. 1) $x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$; 2) $y = (-1/2)\,x + \sqrt{5}$; 3) $x/(2\sqrt{5}) + y/\sqrt{5} = 1$; 4) $(1/\sqrt{5})x + (2/\sqrt{5})\,y - 2 = 0$. 68. 135°. 69. 54 unidades cuadradas. 70. No. 72. $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$. 73. $x + y - 4 = 0$. 74. $3x - 2y = 0$. 75. $x + y - 7 = 0$. 76. $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$. 77. $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$. 99. $\operatorname{tg}\alpha = 27/11$. 100. $x - y = 0$, $5x + 3y - 26 = 0$, $3x + 5y - 26 = 0$. 101. $14x + 14y - 45 = 0$, $2x - 2y + 35 = 0$. 102. $3x - y + 14 = 0$, $x - 5y - 14 = 0$, $x + 2y = 0$. 103. $x - 2 = 0$, $y - 7 = 0$. 104. 4,4. 105. 2,4. 106. $m = 4$. 107. $x - y = 0$, $x + 5y - 14 = 0$, $5x + y - 14 = 0$. 108. $\pi/6$. 109. $(0; 5)$ y $(4; 3)$. 110. $(7/8; 0)$ y $(-27/8; 0)$. 111. $13x + 6y - 82 = 0$, $3x + 4y - 23 = 0$, $S = 31{,}5$ unidades cuadradas. 112. $3x - 2y = 0$, $5x + y + 6 = 0$. 113. $5x + 4 = 0$. 114. $5x + 8y + 11 = 0$. 115. $5y + 2 = 0$. 116. $17x + 11y = 0$. 117. $x + y + 1 = 0$. 118. $x = a$, $y = b$. 119. $x = 1$; $y = x$. 120. 30°. 121. $\varphi = 53°8'$. 122. $5x - 3y + 2 = 0$. 123. $\sqrt{3}$ unidades cuadradas. 125. $B\ (1; 3)$, $C\ (11; 6)$. 126. 1) $x/4 + y/6 = 1$; 2) $x/4\,(\sqrt{2} - 1) + y/(-6)\,(\sqrt{2} + 1) = 1$; 3) $x/(-4)\,(\sqrt{2} + 1) + y/6\,(\sqrt{2} - 1) = 1$. 127. $3x - 4y - 9 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$, o bien, $4x + 3y + 13 = 0$. 134. 1) $a = 4$, $b = -3$, $r = 5$; 2) $a = -5$, $b = 2$, $r = 0$; la ecuación define un punto; 3) $a = 2$, $b = -7$, $r^2 = -1$; la ecuación no tiene ninguna interpretación geométrica (circunferencia imaginaria). 135. $\operatorname{tg}\varphi = -2{,}4$. 136. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$. 137. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. 138. $x = 3{,}2$. 139. $3x - 4y + 8 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$. 140. $(x - 2)^2 + y^2 = 16$.

142. (4; 1,8); (4; —1,8); (—4; 1,8); (—4; —1,8). **143.** b^2/a. **144.** $4x + 3y + 12 = 0$. **145.** $16x^2 + 25y^2 = 41$. **146.** El punto M está fuera de la elipse; el punto N, sobre la elipse; el punto P, dentro de la elipse. **147.** $e = \operatorname{sen}(\alpha/2)$. **148.** M (—5; 7). **149.** $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$. **150.** $x^2/3 + y^2/4 = 1$. **151.** La curva buscada es una elipse. Si se orienta el eje de coordenadas por los lados del ángulo recto (el punto A está sobre el eje Ox), entonces la ecuación de esta elipse es $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$. **155.** $x^2/9 - y^2/8 = 1$. **156.** $x^2/3 - y^2/5 = 1$. **157.** (—4; —3). **158.** $x^2/64 + y^2/48 = 1$. **159.** $x^2 - y^2 = 8/225$. **160.** $e = 2/\sqrt{3}$. **161.** (—8; 0). **162.** $x^2/4 - y^2/12 = 1$. **163.** 6 y 14. **166.** La rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2/3 = 1$. **169.** $y^2 = 4x$. **170.** M_1 (2; 4) y M_2 (2; —4). **171.** $y^2 = 4x$; $y^2 = -4x$. **172.** $y = \pm 2\sqrt{2x}$. **173.** $y^2 = \sqrt{2}x$. **174.** M (0; 0), M_1 (18; —24). **175.** $y^2 = x$, $\operatorname{tg}\alpha = 8/15$. **179.** (3; 2). **180.** (8; —6). **183.** 1) O_1 (1; 2), $p = -1/4$; $x'^2 = -(1/2)\,y'$; 2) O_1 (1; 3), $p = -1/2$; $x'^2 = -y'$; 3) O_1 (1/16; 1/8), $p = -1/8$; $y'^2 = (-1/4)\,x'$; 4) O_1 (1; —2), $p = 1/2$; $y'^2 = x'$. **184.** 1) $x'y' = 1/8$; 2) $x'y' = 13/9$; 3) $x'y' = -6/5$; 4) $x'y' = 1/2$. **187.** La circunferencia $(x - 1/2)^2 + (y - 1/3)^2 = 1$. **188.** La elipse $x'^2/25 + y'^2/16 = 1$; el nuevo origen O' (1; —1). **189.** La hipérbola $x'^2/4 - y'^2/9 = 1$; el nuevo origen O' (2; 3). **190.** El punto O' (2; 1). **191.** La elipse imaginaria $x'^2/(-1) + y'^2/(-1/4) = 1$; $x' = x$, $y' = y + 1$. **192.** La hipérbola $y'^2 - x'^2 = 1$; el nuevo origen O' (3; 0). **193.** La parábola $x'^2 = -y'$; el nuevo origen O' (1; 5/2). **194.** Las rectas $x = 2$ y $x = 4$. **195.** Rectas imaginarias. **202.** El conjunto de dos rectas paralelas $5x + y + 1 = 0$ y $5x + y - 1 = 0$. **203.** El conjunto de dos rectas asíntotas $x + y + 1 = 0$. **204.** El conjunto de dos rectas intersecadas $2x - 3y + 1 = 0$. $4x - 3y - 1 = 0$. **205.** $x''^2/30 + y''^2/5 = 1$. **206.** $x''^2/9 - y''^2/36 = 1$. **207.** $y''^2 = -2x''$. **210.** $x = 1/2$, $y = 1/2$. **211.** El sistema es contradictoria (no tiene soluciones). **212.** $x = a + b$, $y = a - b$. **213.** El sistema es indeterminado (tiene un conjunto innumerable de soluciones; x queda arbitrario e $y = -(3/2)\,x + 1/12$. **214.** $x = y = z = t$. **215.** $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$. **216.** $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$. **222.** 0. **223.** 2. **224.** $2\,(ad - bc)$. **225.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **226.** $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. **228.** $x = t$, $y = 2t$, $z = -3t$. **229.** $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. **230.** $x = t$, $y = t$, $z = -t$.

Capítulo II

234. C (5/3; 11/3; 13/3), D (1/3; 13/3; 17/3). **236.** M (3; 1; 3). **237.** Por la mitad. **238.** M (0; 0; 17/8). **239.** M (16; —5; 0). **245.** $\overline{AM} = (\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c})/(1 + \lambda)$. **247.** $a_x = 0$, $a_y = 2$, $a_z = -2$. **248.** $m^2 + m + 1$. **250.** $a = 3/5$; $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = \cos\gamma = 2/3$. **251.** $|\overline{M_1M_2}| = 7$; $\cos\alpha = 2/7$; $\cos\beta = -6/7$, $\cos\gamma = 3/7$. **252.** $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ó $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. **253.** M $(-4;\ 4;\ 4\sqrt{2})$. **267.** —96. **268.** arccos (17/50). **269.** $m = 1$. **270.** 547. **271.** $A = \mathrm{Fs} = Fs\cos\varphi = 5\sqrt{3}$. **272.** $(\pm 1/\sqrt{11})\,(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$. **273.** $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ó $\mathbf{c} = (1/3)\,(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$. **274.** 20/3 y 20/7. **275.** $\mathbf{r}_D = 7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. **278.** No, ya que los vectores complanares no pueden ser perpendiculares de par en par. **279.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$. **280.** $\sqrt{65/2}$ unidades cuadradas. **281.** 4. **283.** 20 unidades cúbicas. **284.** $4\sqrt{510}/17$.

Capítulo III

296. 1) $(x + y - z - 2)/\sqrt{3} = 0$; 2) $-3/(5\sqrt{2})\,x - (1/\sqrt{2})\,y + 4/(5\sqrt{2})\,z - 7/(5/\sqrt{2}) = 0$. **297.** $d = 13/\sqrt{29}$; el origen de las coordenadas y el punto M_0 están en distintos lados respecto al plano. **298.** $d = 7\sqrt{5/3}$. **299.** 1) $x + y + z - 5 = 0$, 2) $2x + 2y + z - 6 = 0$. **300.** $7x - 11y - z - 15 = 0$. **301.** M (5; 5; 5). **302.** $4x - 3y + 12z - 169 = 0$. **303.** $5y + 4z = 0$; $5x - 3z = 0$; $4x + 3y = 0$. **304.** $6x + 5y - 7z - 27 = 0$. **305.** $x/2 + y/2 +$

$+ z/(\pm\sqrt{2}) = 1$. **306.** $60°$. **307.** $x + 7y + 10z = 0$. **308.** $x - z = 0$. **309.** $x + y + z - 3 = 0$. **310.** $5x + 2y + 5z - 9 = 0$. **311.** $\sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$. **312.** $4x + 3y - 2z - 1 = 0$. **313.** $(A_1D_2 - A_2D_1)\,x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - D_1C_2)\,z = 0$. **314.** $x - y + 2 = 0$. **315.** Arcsen $(5/6)$. **327.** $5y + 5z - 64 = 0$, $x = 0$ (yOz); $5x + 5z - 2 = 0$, $y = 0$ (xOz); $5x - 5y + 62 = 0$, $z = 0$ (xOy). **328.** $(x + 1)/5 = (y - 3)/2 = z/1$. **329.** $\cos\alpha = 6/7$, $\cos\beta = 3/7$, $\cos\gamma = 2/7$. **330.** $(x - 1)/\sqrt{2} = (y + 2)/1 = (z - 3)/(\pm 1)$. **331.** $(x - 5)/1 = (y + 1)/3 = (z + 3)/(-11)$. **332.** $M\ (0;\ 7;\ -2)$. **333.** $(x - 3)(-1) = y/5 = (z + 1)/2$; $x/2 = (y - 7)/(-2) = (z + 2)/3$. **334.** $x = -3t - 1$, $y = 6t + 1$, $z = t + 2$. **335.** $5\sqrt{30/6}$. **336.** $(x - 3)/3 = (y + 1)/(-5) = (z - 2)/(-2)$. **337.** $\cos\varphi = 20/21$. **338.** $x/0 = y/1 = z/2$. **339.** $(x - 4)/2 = (y - 1)/1 = (z + 2)/(-2)$. **340.** $x/2 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/0$. **341.** $(x - 1)/2 = (y - 1)/(-3) = (z - 1)/2$. **342.** $x/1 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/(-1)$. **343.** $x - 5y - 2z + 11 = 0$. **344.** $x/(-10) = (y - 3{,}4)/13 = (z - 5{,}2)\ 19$. **348.** 1) $C\ (-1;\ -2;\ 0)$; $r = 5$; 2) $C\ (2;\ -3;\ -1)$, $r = 4$; 3) $C\ (0;\ -1;\ 3/4)$, $r = 3/4$; 4) $C\ (1;\ 0;\ 0)$, $r = 1$; 5) $C\ (0;\ 0;\ 2)$ $r = 1$. **349.** 1) Dentro de la esfera; 2) fuera de la esfera; 3) sobre la esfera. **350.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. **351.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$, $z = 0$. **352.** $C\ (4;\ 4;\ -2)$, $r = 8$. **356.** 1) Cilindro circular; 2) cilindro elíptico; 3) cilindro hiperbólico; 4) cilindro parabólico; 5) cilindro parabólico; 6) cilindro parabólico; 7) cilindro circular; 8) eje de las z-coordenadas $x = 0$, $y = 0$; 9) planos bisectores $x = z$ y $x = -z$; 10) planos $y = 0$ e $y = x$. **357.** 1) $x^2 + z^2 = 9$, $y = 3$ (circunferencia); 2) $y^2 - x^2 = 1$, $z = 1$ (hipérbola); 3) $z^2 - y^2 = 0$, $x = 0$ (dos rectas). **358.** 1) $y^2/b^2 + z^2/b^2 - x^2/a^2 = 0$; 2) $x^2/a^2 + z^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$; 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$. **361.** $4x^2 + 4y^2 - (z - 2)^2 = 0$. **362.** $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$; $z + 1 = x^2$; $y = 1$; $y^2 = 1 - z$; $x = 1$; $y^2 - x^2 = 1$, $z = -1$. **363.** 1) paraboloide hiperbólico; 2) cono con el vértice en el origen de las coordenadas. **364.** $3z = 2x^2 + y^2$. **365.** $x^2/9 + y^2/5 + z^2/1 = 1$. **366.** $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ (circunferencia). **367.** 1) Eje de ordenadas; 2) cono con el eje Oy y el vértice en el origen de las coordenadas; 3) cono con el eje Ox y el vértice en el origen de las coordenadas; 4) origen de las coordenadas; 5) par de planos que se intersecan en el eje Oz. **374.** Dos planos $x = y$ y $x = z$. **375.** Cilindro circular $(x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$. **376.** Recta $x = y = z$. **377.** Cono de segundo orden $x^2 + (y - 1)^2 - (z - 1)^2 = 0$ con el vértice $S\ (0;\ 1;\ 1)$. **378.** Punto $(0;\ 1;\ -1)$. **379.** Hiperboloide de una hoja con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2/4 - z'^2/4 = 1$. **380.** Hiperboloide de dos hojas con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$. **381.** Paraboloide de revolución con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2 = 4z'$. **382.** Paraboloide hiperbólico con la ecuación canónica $x'^2 - z'^2/9 = 2y'$.

Capítulo IV

387. 900. **388.** 12. **389.** 21 280. **390.** a^2b^2. **391.** $x=1$, $y=2$, $z=1$, $t=-1$. **392.** $x=1$, $y=1$, $z=0$, $t=-2$. **393.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. $u=4$, $v=5$, **412.** $B=$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{413.}\ \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{414.}\ \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 & 7/10 \\ 0 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

416. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=11$; $\mathbf{e}_1=(4/\sqrt{41})\,\mathbf{i}-(5/\sqrt{41})\,\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2=(1/\sqrt{2})\,\mathbf{i}+(1/\sqrt{2})\ \mathbf{j}$. **417.** $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$; $\mathbf{r}_1=\alpha\,(\mathbf{i}-\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2=\beta\,(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{r}_3=\gamma\,(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$. **418.** $x''^2/16+y''^2/4=1$. **419.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **420.** $x''^2/25-y''^2/9=1$. **421.** $y''^2=2\sqrt{2}x''$. **422.** $x'^2+y'^2/1-z'^2/3=1$ (hiperboloide de una hoja). **423.** $2y''^2+3z''^2=\sqrt{6}\,x''$ (paraboloide elíptico). **424.** (t; $2t$; $3t$, donde t es un número real arbitrario). **425.** ($2t$; $2t$; t, donde t es un número real arbitrario). **426.** (0; 0). **427.** La recta $x'\cos\alpha-y'\,(1+\operatorname{sen}\alpha)=0$. **434.** $r\,(A)=0$, si $\lambda=0$; $r(A)=2$, si $\lambda\neq 0$. **435.** $r(A)=3$. **436.** $r(A)=3$; los menores básicos $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. **437.** $r(A)=2$; los menores básicos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. **441.** El sistema es compatible, $r(A)=r(A_1)=2$; $x_1=1$, $x_2=1/2$. **442.** $r(A)=1$, $r(A_1)=2$, el sistema es incompatible. **443.** El sistema es compatible, $r(A)=r(A_1)=2$. **446.** $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=2$. **447.** $x_1=1$ $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. **448.** $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=3$, $x_4=1$, $x_5=2$. **449.** El sistema es incompatible. **450.** $x=1{,}96$, $y=2{,}96$, $z=5{,}04$. **451.** $x=1{,}50$, $y=1{,}16$, $z=1{,}40$. **457.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. **458.** $x_1=u$, $x_2=u+1$, $x_3=u+2$, $x_4=u+3$. **459.** El sistema es incompatible. **460.** $r(A)=3$.

Capítulo V

463. Sí. **464.** No, ya que la suma de dos elementos del conjunto no es un elemento de este conjunto. **465.** No, ya que la suma de dos polinomios de segundo grado puede ser un polinomio de primer grado o una constante. **466.** Sí. **467.** 1) Sí; 2) sí; 3) sí; 4) no. **468.** Sí. **469.** 1) Sólo en el caso si esto es un vector nulo; 2) no, ya que en este espacio, además de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, deben haber también otros vectores de la forma $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$. **470.** No, ya que en el conjunto obtenido habrá vectores cuya suma será igual a $\mathbf{x}$, por ejemplo, los vectores $(\mathbf{x}-\mathbf{y})/2$ y $(\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$. **471.** Sí, puede ser. Por ejemplo, eliminando del conjunto de vectores geométricos los vectores que no son perpendiculares al eje Oz, obtendremos el conjunto de vectores $\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}$ que forma un espacio lineal. **473.** No, ya que $\lambda(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ no pertenece a este conjunto si λ no es un número entero. **474.** No. **475.** No, puesto que los vectores opuestos no están en el octante I. **488.** Conjunto de todos los polinomios no superiores a grado n. **501.** $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3+4\mathbf{e}_4$. **502.** $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1'+\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_3'+\ldots+\mathbf{e}_n'$. **504.** $\xi_1=\varepsilon\xi_5'$, $\xi_2=\alpha\xi_1'$, $\xi_3=\beta\xi_2'$, $\xi_4=\gamma\xi_3'$, $\xi_5=\delta\xi_4'$. **505.** No, puesto que tiene lugar la igualdad $\mathbf{e}_1'+\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_3'=0$, lo que es imposible en virtud de la independencia lineal de los vectores de base $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ y $\mathbf{e}_3'$. **506.** Se puede sólo en el caso en que este elemento sea un vector nulo. **508.** La intersección es el conjunto de los elementos $\mathbf{x}_{12}=(0; 0; \xi_3; \xi_4)$, $\mathbf{y}_{12}=(0; 0; \eta_3; \eta_4)$, $\mathbf{z}_{12}=(0; 0; \zeta_3; \zeta_4)$, ... La suma coincide con el espacio R. **509.** $d(R_1)=3$, $d(R_2)=3$, $d(R_3)=2$, $d(R_4)=4$. **510.** No. **513.** R_3 es un conjunto de constantes, R_4 es un conjunto de polinomios del tipo $c_0t^4+c_1t^2+c_2t+c_3$. **514.** R_3 es el conjunto de todos los vectores paralelos al eje Ox y $R_4=R$. **516.** El conjunto de todas las funciones pares forma un subespacio, mientras que el conjunto de funciones impares no lo forma, puesto que el producto de dos funciones impares es una función par. **517.** No, puesto que todo vector $\lambda\mathbf{a}$ no pertenece a este conjunto si λ es un número irracional. **522.** $k=3$; $\mathbf{f}_1=(-1; 0; 1; 0; 0)$, $\mathbf{f}_2=(-1; 0; 0; 1; 0)$, $\mathbf{f}_3=(0; -1/2; 0; 0; 1)$, $\mathbf{f}=(-c_1-c_2; -0{,}5c_3; c_1, c_2, c_3)$. **526.** Sí. **527.** No, puesto que la igualdad $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}$ no se cumple si $ab\neq 0$. **528.** Sólo en el caso en que $\mathbf{x}_0=0$. **529.** Sólo para $a=0$. **530.** Sí.

533. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}$. 536. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 538. $3A-2B=E$. 544. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 545. $A^{-1}=A$. 546. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 547. $B=2E\cos\alpha$.

548. La transformación lineal A no tiene la transformación inversa, ya que $|A| = 0$. **549.** $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **550.** Para $\lambda = -2$. **552.** 1) Si $\alpha \neq \beta$, entonces $\lambda_1 = \alpha$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1$, $\lambda_2 = \beta$, $\mathbf{v} = c_2\mathbf{e}_2$; 2) si $\alpha = \beta$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$. 553. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. **554.** 1) Si $b \neq 0$, entonces la transformación lineal no tiene vectores propios; 2) si $b = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$. 556. $\lambda = 2$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$; $\lambda = 3$, $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$; $\lambda = 6$; $\mathbf{w} = c_3(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. 558. $\lambda = -1$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$. 560. $\lambda = 1$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$; $\lambda = -1$, $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$. **561.** $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$, $\mathbf{u} = c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. **563.** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es el precio total de todos los artículos confeccionados por la fábrica. 565. Sí. 566. No, ya que no se cumplen las condiciones 2ª y 3ª si $\lambda < 0$. 567. Sí. 569. $\arccos(1/n)$. **573.** Sí. **576.** $|\mathbf{x}| = 5$. **577.** $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = (1/15)\,\mathbf{e}_1 + (2\sqrt{2}/15)\,\mathbf{e}_2 + (\sqrt{3}/5)\,\mathbf{e}_3 + (8/15)\,\mathbf{e}_4 + (\sqrt{5}/3)\,\mathbf{e}_5$. **579.** $\mathbf{x}$ es el vector normalizado. **580.** $\varphi = \pi/3$. **581.** $\pm 0{,}5 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$. 582. $\lambda = \pm 1$. 587. Sí. 588. Sí. **589.** Para $\lambda = \pm 1$. **590.** Sí, ya que los vectores $\mathbf{Ae}_1$, $\mathbf{Ae}_2$ y $\mathbf{Ae}_3$ forman una base ortonormal. **591.** Sí.

Capítulo VI

602. $n = 4$. 603. $\delta = 0{,}16\%$. **604.** $\delta = 0{,}0005\%$. 605. $\delta = 0{,}022\%$; $n = 4$; $S = 8765 \pm 0{,}1$ (m²). **613.** 1) $[-2, 0[\cup]0, 2]$; 2) $[0, 4]$; 3) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; 4) $x \neq \pi(2n+1)/4$, $n \in Z$; 5) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$; 6) $]1/3, +\infty[$; 7) $[0, 2[$. **614.** 1) $]1, +\infty[$; 2) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; 3) $[-4; 4]$; 4) $]-\infty, 3[$; 5) $[-2, 4]$; 6) $]0, 1]$. 615. 1) Impar; 2) par; 3) no par, ni impar; 4) par; 5) no par, ni impar; 6) par; 7) impar. **616.** 1) $2\pi/5$; 2) 6π; 3) π; 4) π. **653.** 1/2. **654.** -1. **655.** 1/6. 656. -2. **657.** $-\operatorname{sen} a$. 658. m/n. 659. $\sec^2 x_0$. 660. $-\sqrt{2}/4$. **661.** 1/2. **662.** ∞. 663. 2. **664.** 3/4. **665.** $-1/4$. 666. 1/2. **667.** 3. 668. $\sqrt{7}/4$. 669. 25/9. **670.** 1/2. **671.** m. **672.** 1 si $x \to +\infty$; -1 si $x \to -\infty$. **673.** $(a - c)/2$. **674.** 0. **675.** 0. **676.** ln 5. **677.** $\ln(8/7)$: $\ln(6/5)$. 678. 2. 679. ln 5. **680.** 1/4. **681.** 1 si $x \to +0$; -1 si $x \to -0$. **682.** $+\infty$. **683.** 2. 684. 0. **685.** No existe. **686.** 5/4. **687.** $\ln a$. 688. e. **689.** e^3. **690.** 1/6. **691.** $\ln(5/4)$. 692. 1. 693. -3. **694.** 0. 695. 1/2. **696.** e^{10}. **697.** $\sqrt{e}$. 698. e^{a-b}. 699. $\sqrt{e}$. 704. $y \sim x$. **705.** 2. **706.** 1/2. **707.** $\alpha = 0(\beta)$. 708. $\alpha \sim \beta$. 709. $\alpha \sim \beta$. **710.** 1/3. **711.** 9/4. **712.** $-1/2$. 713. $-1/2$. **714.** $-1/2$. 715. 1. **716.** 9/25. **717.** $(\ln 5 \cdot \ln 4)/(\ln 3 \cdot \ln 6)$. 718. 1,6. 722. $x = 2$ es el punto de salto. **723.** $x = 1$, $x = 5$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 724. Discontinuidad de segunda especie. **725.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable. **726.** $x = 3$ es el punto de salto; $x = 5$ es el punto de discontinuidad de especie II; $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $x = \pi/2 + \pi n$ $(n \in Z)$ es el punto de discontinuidad de segunda especie. **727.** $x = 1$, $x = 2$ son puntos de discontinuidad evitable. 728. $x = -2$, $x = -3$ son puntos de discontinuidad de segunda especie, $x = -1$ es el punto de discontinuidad evitable. 729. La función es continua en el intervalo infinito $]-\infty, +\infty[$. **730.** 1) La función es continua; 2) tiene un punto de discontinuidad de especie II; 3) tiene dos puntos de discontinuidad de especie II. **731.** 1) La función es continua; 2) tiene dos puntos de discontinuidad de segunda especie; 3) tiene cuatro puntos de discontinuidad de segunda especie.

Capítulo VII

735. $y' = -2/x^3$. **736.** $y' = 2/(3\sqrt[3]{x})$. **737.** $y' = 5\cos x - 3\operatorname{sen} x$. **738.** $y' = 5\operatorname{tg}^2 x$. **739.** $y' = -e^x/(e^x + 1)^2$. **740.** $y' = 2x^2 \cdot 2x \cdot \ln 2$. **767.** $y' = -21/x^4$. 768. $y' = \sqrt[3]{x}$. **769.** $y' = x^2\sqrt{x}(1 - x^2)^2$. 770. $y' = -x^2e^{-x}$. **771.** $y' = 9x^2 \ln x$. **772.** $y' = (8/9)^x \ln(8/9)$. **773.** $y' = x^2 \cos x$. **774.** $y' = 6(x + 1)/(2x^2 + 3x)$. **775.** $y' = -3x/\sqrt{1 - 3x^2}$. **776.** $y' = \arccos(x/2)$. **777.** $y' = 1/(2\sqrt{x}) \arcsen \sqrt{x}$. **778.** $y' = -\cos x$. **779.** $y' = -\cos^2(x/3)\operatorname{sen}(x/3)$.

780. $y' = \operatorname{cosec}(2x+1)/2$. **781.** $y' = 1/\cos x$. **782.** $y' = 2\sec^6 2x$. **783** $y' = 1/(2\sqrt{x})\,\operatorname{sen}^2 \sqrt{x} \cos^5 \sqrt{x}$. **784.** $y' = 6x/\sqrt{9x^4+1}$. **785.** $y' = \sqrt{a^2-x^2}$. **786.** $y' = -2\sec^2 x/\sqrt{\operatorname{tg} x\,(4\operatorname{tg} x+1)}$. **787.** $y' = \operatorname{ctg}^3(x/2)$. **788.** $y' = 1/(x\sqrt{4x^2-1})$. **789.** $y' = 1/\sqrt{a^2-x^2}$. **790.** $y' = 1/(2\sqrt{1-x^2})$. **791.** $y' = 6x^2/(1+x^6)$. **792.** $y' = 6\operatorname{sen} x/(x^2+9)$. **793.** $y' = -2e^{-x}\operatorname{sen}^2 e^{-x}$. **794.** $y' = -1/(2\sqrt{1-x^2})$. **795.** $y' = -6/[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]$. **796.** $y' = 3e^{\operatorname{sen}^2 3x}\operatorname{sen} 6x \operatorname{sen}^2 3x$. **797.** $y' = -24\ \ln \operatorname{sen} x\cdot\operatorname{ctg} x/(4\ln^4 \operatorname{sen} x - 9)$.
798. $y' = \sec x$. **799.** $y' = \operatorname{cosec} x$. **800.** $y' = e^{\sqrt{2x}}$. **801.** $y' = 10/[x(x^5+2)]$. **802.** $y' = 2\operatorname{sen} x/(1+\cos x)^2$. **803.** $y' = \cos x/(1+\operatorname{sen}^2 x)$. **804.** $y' = \operatorname{cosec}^2(x/2)\operatorname{ctg}(x/2)$. **805.** $y' = (2/x)\cos^2(\ln x)$. **806.** $y' = 5x^4\ln(x^5+3)$, **807.** $y' = -x/(|x|\sqrt{5-x^2})$. **808.** $y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$. **809.** $y' = 0$. **810.** $y' = (mx+n)/\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$. **811.** $y' = 1/(1-mx^2)^{3/2}$. **812.** $y' = 4x\cos^2 x$.
813. $y' = -2\operatorname{cosec}^3 x$. **814.** $y' = \dfrac{\cos x \ln \operatorname{sen} x}{(1+\ln \operatorname{sen} x)^2}$. **815.** $y' = 9x\operatorname{sen}^2 x\cos x$.
816. $y' = 2/(x\sqrt{1+x^2})$. **817.** $y' = 2e^x\operatorname{sen}^2 e^x$. **818.** $y' = 2/(x^2+2x+2)^2$. **819.** $y' = \ln^3 x$. **820.** $y' = (\ln \operatorname{sen}\sqrt{x})/(2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x})$. **821.** $y' = 2(1+\ln x)/(x^x + x^{-x})$. **822.** $y' = 1/\operatorname{sen}^5 x$. **823.** $y' = \cos^4 x/\operatorname{sen} x$. **824.** $y' = 1/(3\operatorname{sen} x + 4\cos x + 5)$. **825.** $y' = \cos x\operatorname{tg}^3 \operatorname{sen} x$. **826.** $y' = 1/[x^2(x-1)]$. **827.** $y' = 1/[x(x+1)(x+2)]$. **828.** $y' = 4x\operatorname{tg}^2 2x$. **829.** $y' = -2e^x/\sqrt{1-e^{2x}}$. **830.** $y' = (\ln\ln\ln x)/(x\ln x)^2$. **831.** $y' = 2e^{2x}\times(1-2x)/(x+e^{2x})^2$. **832.** $y' = 2(\ln x+1)/(x^2\ln x - 1)$. **833.** $y' = 3/(1+x^2)$. **834.** $y' = (e^{2\operatorname{sen} x}\cos x)$: $\operatorname{sen}(e^{2\operatorname{sen} x}/2)$. **835.** $y' = a\operatorname{sen} 2x$. **836.** $y' = 3\sec^2 x\sec^4\operatorname{tg} x$. **837.** $y' = (-1/x^2)\operatorname{arctg} x$. **838.** $y' = (-5/x^6)\ln x$. **839.** $y' = (1/\sqrt{2x+1})\ln(2x+1)$. **840.** $y' = \sec x\operatorname{tg} x\ln\sec x$. **841.** $y' = -2e^{3x}/\sqrt{1-e^{2x}}$. **842.** $y' = 3\cdot 2^{\cos^3 x - 3\cos x}\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\ln 2$. **843.** $y' = (e^x\cdot 2^{5x}/3^{4x})\cdot\ln(32e/81)$. **844.** $y' = 0$. **845.** $y' = x\cos 2x$. **846.** $y' = 2e^{x^2}x(x^4+x^2+1)/(x^2+1)^2$. **847.** $y' = x\cos x/\operatorname{sen}^2 x$. **848.** $y' = (1/\sqrt{x})\times\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$. **849.** $y' = x^2/(x^4-a^4)$. **850.** $y' = -4x/\sqrt{x^4+1}$. **851.** $y' = e^{0,5\operatorname{tg}^2 x}\times\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^2 x$. **852.** $y' = 8x^3/(1+x^8)$. **853.** $y' = xe^{x^2}(2x^2\ln x + 2\ln x + 1)$.
854. $y' = 0{,}5\ln 2\sqrt{2^x/(1-2^x)}$. **855.** $y' = -\ln 2/(2x\ln^2 x)$. **856.** $y' = (mx+n)/\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}$. **857.** $y' = (2/\ln 2)\ \operatorname{ctg}\ x$. **858.** $y' = 1/(\sqrt{x^2+9}\ln a)$. **859.** $y' = x^{\arcsen x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsen x}{x}\right)$.

860. $y' = 8(x-1)^3/(x+1)^5$. **861.** $y' = \dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}\left(\ln 2 + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2x+1}\right)$. **862.** $y' = -1/(|x|(\sqrt{1+x^2})$. **863.** $y' = x^m\cos(n\ln x)$.
864. $y' = (x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)\sec^2(x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)\,x\sec^2 x$. **865.** $y' = -x\operatorname{sen}\times\ln(x\cos x - \operatorname{sen} x)$. **866.** $y' = 3\cos^3(xe^x - e^x)\cdot xe^x$. **867.** $y' = -2(1-2x^2)/(|1-2x^2|\sqrt{1-x^2})$. **868.** $y' = \begin{cases} 1, \text{ si } x > 0; \\ -1, \text{ si } x < 0. \end{cases}$

869. $y' = \begin{cases} f'(x), \text{ si } f(x) > 0; \\ -f'(x), \text{ si } f(x) < 0. \end{cases}$ **870.** $y' = \begin{cases} 3, \text{ si } x > 5/3; \\ -3, \text{ si } x < 5/3. \end{cases}$

871. $y' = \begin{cases} e^x, \text{ si } x > 0; \\ -e^{-x}, \text{ si } x < 0. \end{cases}$ **872.** $y' = \begin{cases} -2, \text{ si } x < 0; \\ 0, \text{ si } 0 < x < 2; \\ 2, \text{ si } x > 2. \end{cases}$

873. $y' = 2xe^x\operatorname{sen} x$.

874. $y' = (x\cos x)/\sqrt{(x\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 1}$. **875.** $y' = x^{x+1}\ln x(\ln x - 1)/e^x$.

876. $y' = (\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{sen} x)/\ln^2 \cos x$. 877. $y' = nx^{n-1}/(2\sqrt{x^{2n}+1})$. 878. $y' = -(\log_x e)^2/x$. 879. $y' = 0$. 880. $y' = 1/2$. 881. $y' = 0$. 882. $y' = x^x(1 + \ln x)$. 883. $y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 (\ln 2 + 2x^{-1} - 1 - \ln x)$. 884. $y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x$. 885. $y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}} \cdot \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right]$. 889. $(\operatorname{arcsec} x)' = 1/(x\sqrt{x^2-1})$, $(\operatorname{arccosec} x)' = -1/(x\sqrt{x^2-1})$. 890. $4 \operatorname{cosec}^2 x$. 894. $y' = (x^2 - y)/(x - y^2)$. 895. $y' = -(Ax + By + D)/(Bx + Cy + E)$. 896. $y' = x/(3y)$. 897. $y' = y(y - x \ln y)/x(x - y \ln x)$. 898. $y' = -(y \cos x + \operatorname{sen} y)/(x \cos y + \operatorname{sen} x)$. 899. $y' = -(e^x - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)/(e^y - x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)$. 900. $y' = 2x$. 901. $y' = y/x$. 902. $y' = -y/(2x \ln x)$. 903. $y' = -(2x \operatorname{sen} y - y^3 \operatorname{sen} x - 2)/(x^2 \cos y + 3y^2 \cos x - 3)$. 905. $-\operatorname{ctg} t$. 906. e^{2t}. 907. $2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}}$. 908. $\operatorname{cth} t$. 910. $\alpha = \pi/4$; $y = x + 1$. 913. $y - y_0 = (-y_0/p)(x - x_0)$. 914. $x - y + 1 = 0$. 915. $x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$. 916. $x - y + 2 - \pi/2 = .$ $x + y - \pi/2 = 0$. 917. $3x - y - 4 = 0$; $x + 3y - 28 = 0$. 919. $\pi/4$. 920 $3x - 8y + 10 - 6 \ln 2 = 0$; $32x + 12y - 15 - 64 \ln 2 = 0$. 921. $x \operatorname{ch} t_0 - y \operatorname{sh} t_0 - 1 = 0$. 922. $\operatorname{tg} \varphi = 2/3$. 923. $\pi/4$. 924. $\pi/4$; $3\pi/4$. 925. $\operatorname{tg} \varphi_1 = 3$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = -3$. 926. $\pi/2$. 929. 1,76 m/s. 929a. $x'_t = \sqrt[3]{a}$. 930. 5) $\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{3}$, $\omega = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. 6) $\operatorname{tg} \omega = \varphi$, cuando $\varphi \to \infty$ la intersección será bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$. 7) $\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi$. 8) $\omega = 0$; 9) $\omega = \operatorname{arctg} 2{,}4$. 10) $\omega = 3\pi/4$. 11) $\operatorname{arctg} 1/m$. 12) $\omega = \pi - \operatorname{arctg} \frac{125}{64}$. 936. $y'' = -44/(x+5)^3$. 937 $y'' = \ln x$. 938. $y'' = 2\sqrt{1 = x^2}$. 939. $y'' = x \operatorname{sen} 3x$. 940. $y'' = 1/\sqrt{x^2+a^2}$. 941. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \operatorname{cosec}^4 \frac{t}{2}$. 942. $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t - t^2}$.

945. $-1/32$ m/s². 946. $y''' = 1/(x+1)^4$. 947. $y''' = (2 \ln x - 3)/x^3$. 948. $y''' = 105\sqrt{2x+3}$. 949. $y''' = 4 \operatorname{sh} 2x$. 950. $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$. 951. $y^{(n)} = \frac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$. 952. $y^{(n)} = -1{,}5 \cdot 2^n \cdot \cos(2x + \pi n/2)$. 953. $y^{(n)} = [2^x + (-1)^n \times 2^{-x}] \ln^n 2$. 954. $y^{(n)} = \frac{n!(ad - bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$. 955. $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

956. $y^{(n)} = \cos(x + \pi n/2)$. 957. $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{t}$.

958. $y''' = y^{\mathrm{IV}} = \ldots = 0$. 968. $dy = \sqrt{49 - x^2}\, dx$.

969. $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$. 970. $dy = \operatorname{th}(x/2)\, dx$. 971. $dy = \frac{2e^{2x}\, dx}{1 + e^{4x}}$. 972. $dy = \ln x\, dx$, $d^2y = \frac{(dx)^2}{x}$, $d^3y = -\frac{(dx)^3}{x^2}$. 973. $d^2y = \frac{-x(dx)^2}{(x^2+4)^{3/2}}$, 974. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$, $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$. 975. $\Delta y = 0{,}0401$; $dy = 0{,}04$. 976. 0,811. 977. 34,04 m³. 978. 1,035. 979. 0,078. 980. $\pi/4 + 1/13$. 981. 1,9938. 993. $\xi = 5/2$. 994. $\frac{1}{x_0} - \frac{x - x_0}{x_0^2} + \frac{(x-x_0)^2}{x_0^3} - \frac{(x-x_0)^3}{x_0^4} + R_3$, donde $R_3 = \frac{(x-x_0)^4}{\xi^5}$ $(x_0 \gtrless \xi \lesseqgtr x)$. 995. $M(\sqrt{3}; 0)$.

996. 0,754. **997.** 4,946. **998.** 1,395. **999.** 2,002. **1000.** 0,587. **1010. 3/5. 1011.** 2. **1012.** 2/3. **1013.** 1/3. **1014.** 0,18. **1015.** 18. **1016.** 1. **1017.** 0. **1018.** 1/2. **1019.** ∞. **1020.** 0. **1021.** $1/\pi$. **1022.** 1. **1023.** 0. **1024.** $-1/2$. **1025.** $(p-q)/2$. **1026.** 2/3. **1027.** 1. **1028.** e^{-6}. **1029.** 2. **1030.** $e^{1/3}$. **1041.** Crece en $]-\infty, -1[$ y en $]1, +\infty[$, decrece en $]-1, 1[$. **1042.** Decrece en $]-\infty, -1[$, crece en $]-1, +\infty[$. **1043.** Crece en$]-\infty, 1,$ [decrece en $]1, +\infty[$. **1044.** Decrece en $]-\infty, -1[$y en $]1, +\infty[$, decrece en $]-1, 1[$. **1045.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2\sqrt[3]{2/49}) = (12/49)\sqrt[3]{4/7}$. **1046.** $y_{\max} = y(11/4) = 13/4$. **1047.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **1048.** $y_{\min} = y(0) = 1$. **1049.** $y_{\min} = y(e) = e$. **1050.** $y_{\max} = y(1) = 1/\sqrt{e}$, $y_{\min} = y(-1) = -1/\sqrt{e}$. **1051.** $y_{\min} = y(1) = 0$. **1052.** $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 3$. **1053.** $y_{\min} = y(1) = -1$. **1054.** $y_{\max} = (\pi - 12 + 6\sqrt{3})/12$, $y_{\min} = (5\pi - 12 - 6\sqrt{3})/12$. **1055.** $y_{\max} = e^{3/2}$, $y_{\min} = e^{-3/2}$. **1056.** $y_{\min} = 2$, $y_{\text{máx}} = 66$. **1057.** (0; 4) y (0; -4). **1058.** 25 km; 8 h 15 min. **1059.** $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$. **1060.** $l/4$, $l/4$. **1061.** $V = 2\pi l^3\sqrt{3}/27$. **1062.** $V = (S/3)\sqrt{S/(6\pi)}$. **1063.** A una distancia de 9 km a partir de *A*. **1064.** 125 m. **1065.** $a/\sqrt{2}$. **1069.** Es convexa en $]-\infty, -2[$, es cóncava en $]-2, +\infty[$. **1070.** (4; 20). **1071.** (1; 0). **1072.** No hay puntos de inflexión. **1077.** $x = 0$; $y = 2x$. **1078.** $x = 0$; $y = -3x$. **1079.** $y = x - 6$. **1080.** $y = x/2 + \pi$ e $y = x/2$. **1081.** $y = \pi x/2 + 1$ e $y = -\pi x/2 + 1$. **1084.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la función es par y periódica con el período de π. Crece en $]\pi k, \pi/2, +\pi k[$, decrece en $]\pi/2 + \pi k, \pi + \pi k[$; $y_{\min} = y(\pi k) = 0$, $y_{\text{máx}} = y(\pi/2 + \pi k) = 1$, $k \in Z$. La curva es cóncava en $]-\pi/4 + \pi k, \pi/4 + \pi k[$ y convexa en$]\pi/4 + \pi k, 3\pi/4 + \pi k[$; los puntos de inflexión son $(-\pi/4 + \pi k;\ 1/2)$ y $(\pi/4 + \pi k;\ 1/2)$ $k \in Z$. **1085.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$, la función es impar. Decrece en $]-\infty, -1[$ y en $]1, +\infty[$, crece en $]-1, 1[$; $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$. La curva es cóncava en $]-\infty, 0]$ y convexa en $]0, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1086.** $D(y) =]1, +\infty[$; las asíntotas son $x = 1$, $y = 0$. Decrece en todo el campo de definición. La curva es cóncava por doquier. No hay extremos ni puntos de inflexión. **1087.** $D(y) =]-\infty; 0[\cup]1, +\infty[$; las asíntotas son $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Crece en$]\ [-\infty, 0[$, decrece en $]1, +\infty[$.La curva es cóncava por doquier. No hay extremos ni puntos de inflexión. **1088.** $D(y) =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$; la función es impar; las asíntotas son $x = -2$, $x = 2$, $y = x$. Crece en $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ y en $]2\sqrt{3}, +\infty[$, decrece en $]-2\sqrt{3}, -2[$, $]-2, 2[$ y en $]2, 2\sqrt{3}[$; $y_{min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. La curva es convexa en $]-\infty, -2[$ y en $]0, 2[$, es cóncava en $]-2, 0[$y en$]\ 2, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1089.** $D(y) =]0, +\infty[$; la asíntota $y = 0$. Crece en $]0, e^2[$, decrece en $]e^2, +\infty[$; $y_{\text{máx}} = y(e^2) = 2/e$. La curva es convexa en $]0, e^{8/3}[$ y cóncava en $]e^{8/3}, +\infty[$; el punto de inflexión es $(e^{8/3};\ 8e^{-4/3}/3)$. **1090.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$. Decrece en $]-\infty, 1/4[$, crece en $]1/4, +\infty[$; $y_{\min} = y(1/4) = -27/16$. La curva es cóncava en $]-\infty, 1/2[$ y en $]1, +\infty[$, convexa en $]1/2, 1[$; los puntos de inflexión son (1/2; -1) y (1; 0). **1091.** $D(y) = [0, +\infty[$. Decrece en $]0, 1/3[$, crece en $]1/3, +\infty[$; $y_{\min} = y(1/3) = -2/3\sqrt{3})$. La curva es cóncava por doquier. **1092.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la asíntota $y = x$. Decrece en $]-\infty, 0[$, crece en $]0, +\infty[$; $y_{\min} = y(0) = 1$. La curva es cóncava por doquier. **1093.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la función es impar, las asíntotas $y = -1$ e $y = 1$. Crece en$]-\infty, +\infty[$. La curva es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1094.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$, la asíntota $y = 0$. Crece en $]-\infty, 1[$, decrece en $]1, +\infty[$; $y_{\text{máx}} = y(1) = e$. La curva es cóncava en $]-\infty, 1 - \sqrt{2}/2[$ y en $]1 + \sqrt{2}/2, +\infty[$, convexa en $]1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2[$; los puntos de inflexión son $(1 + \sqrt{2}/2;\ \sqrt{e})$ y $(1 - \sqrt{2}/2;\ \sqrt{e})$. **1095.** $D(y) =]-\infty, 2[\cup]2 + \infty[$; las asíntotas $x = 2$ e $y = x + 4$. Crece en $]-\infty, 2[$ y en $]6, +\infty[$, decrece en $]2, 6[$; $y_{\min} = y(6) = 27/2$. La curva es convexa en $]-\infty, 0[$, cóncava en

]0, 2[y en]2, $+\infty$[; el punto de inflexión es (0; 0). **1100.** $R = 25/3$. **1101.** $R = (4a/3)\cos(\theta/2)$. **1102.** $k = 1/(e\sqrt{2})$. **1103.** (2; 2). **1104.** La circunferencia $\xi^2 + \eta^2 = 1$. **1107.** Primero. **1108.** Primero. **1109.** Tercero. **1110.** Primero. **1111.** Tercero. **1112.** Segundo. **1114.** Circunferencia $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$. **1115.** La recta que pasa por el origen de las coordenadas y forma con los ejes de las mismas ángulos iguales. **1116.** La recta paralela al eje Oz que pasa por el punto (1; 1; 0). **1117.** La hipérbola equilátera que está en el plano xOz. **1120.** $(\mathbf{i} + \mathbf{k})\,\mathrm{sh}\,2t + \mathbf{j}\,\mathrm{ch}\,2t$. **1121.** 0. **1122.** $3(t^2 - 2t^5)\,\mathbf{i} + (5t^4 - 2t)\,\mathbf{j}$. **1124.** $x/(-1) = (y-1)/0 = (z - \pi\sqrt{3}/2)/\sqrt{3}$, $2x - 2z\sqrt{3} + 3\pi = 0$. **1125.** $M_1\,(0;\,0;\,-1)$ y $M_2\,(2/3;\,-8/9;\,-1/27)$. **1126.** $70°\,23'$. **1127.** $x/1 = (y-1)/0 = (z - \sqrt{2}/2)/1$, $x + z - \sqrt{2}/2 = 0$. **1128.** $(x-1)/2 = (y+1)/0 = (z-1)/1$. **1129.** $(x-1)/2 = (y-1)/3 = (z-1)/4$. **1130.** $\arccos(14/(3\sqrt{29})$. **1132.** $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$. **1133.** $h = 2\sqrt{3}\pi$. **1134.** $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + 3\mathbf{j}\cos t + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -3\mathbf{i}\cos t - 3\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t$. **1135.** $\mathbf{v}|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w}|_{t=1} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. **1137.** $\boldsymbol{\tau} = (5/13)\,\mathbf{i} - (12/13)\,\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t + (12/13)\,\mathbf{k}\cos t$. **1138.** $\boldsymbol{\tau} = -(1/3)\,\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)\,\mathbf{k}$. **1147.** $(2/3)\,\mathbf{i} + (2/3)\,\mathbf{j} + (1/3)\,\mathbf{k}$. **1148.** $(1/3)\,\mathbf{i} - (2/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$. **1149.** $(-2/3)\,\mathbf{i} + (1/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$. **1150.** 2/27. **1151.** 2/27. **1152.** $X - 2Y + 2Z - 2 = 0$. **1153.** $2X - Y - 2Z - 7 = 0$. **1154.** $2X + 2Y + Z - 19 = 0$.

Capítulo VIII

1160. $x^2 + y^2 \geqslant 1$ es la parte del plano fuera del círculo unitario que tiene por centro el origen de las coordenadas. **1161.** La parte del plano dentro del círculo $x^2 + y^2 < 1$. **1162.** La franja comprendida entre las rectas paralelas $x + y \leqslant 1$ y $x + y \geqslant -1$. **1163.** Los anillos concéntricos $\pi/2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 0$, $5\pi/2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 3\pi/2$, ... **1164.** $y > x$ es el semiplano que está por encima de la bisectriz $y = x$. **1165.** Semiplano $x \geqslant 0$. **1166.** La esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$. **1167.** La parte del espacio que está fuera del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **1168.** La parte del espacio que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ a excepción del origen de las coordenadas. **1169.** La parte del espacio ubicada por encima del plano $x + y + z = 0$ incluyendo este plano. **1170.** La familia de las rectas paralelas $2x + y = C$. **1171.** La familia de las rectas $y = Cx$. **1172.** La familia de las rectas $y = e^{2C}x$, o bien $y = C_1x$ $(C > 0)$. **1173.** La familia de las parábolas $y = C\sqrt{x}$. **1174.** La familia de las hipérbolas equiláteras $xy = C$ (para $C \neq 0$); el conjunto de los ejes de las coordenadas Ox y Oy (para $C = 0$). **1175.** La familia de los planos $x + y + 3z = C$. **1176.** La familia de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C$. **1177.** La familia de los hiperboloides de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (para $C > 0$); la familia de los hiperboloides de una hoja $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (para $C < 0$); el cono $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (para $C = 0$). **1183.** $\dfrac{du}{dx} = 2x - 3y - 4$, $\dfrac{du}{dy} = 4y - 3x + 2$. **1184.** $\dfrac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho\,\mathrm{sen}^4\,\theta$, $\dfrac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta$. **1185.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{2x^2}{y^3}$. **1186.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)}\,(3x^2y + y^3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}\,(x^3 + 3xy^2)$. **1187.** $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$. **1188.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\,e^{x/y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\,e^{x/y} + \dfrac{z}{y^2}\,e^{-z/y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{y}\,e^{-z/y}$. **1189.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$. **1190.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2\,(x^3 + y^2)\,e^{(x^3+y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y(x^3+y^2)\,e^{(x^3+y^2)^2}$. **1191.** $\frac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(2x-y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(x-z)(x-2y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(x-y)(-y+2z-x)$. **1192.** $\frac{\partial u}{\partial x}=(6x-y)\,e^{3x^2+2y^2-xy}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(4y-x)\,e^{3x^2+2y^2-xy}$. **1193.** $\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}\operatorname{sen}\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\,e^{xyz}\cos\frac{y}{x}$. **1195.** ρ. **1200.** $dz=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}$. **1201.** $dz=\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{x^2\operatorname{sen}(2y/x)}$. **1202.** $2(x\,dx+y\,dy)\cos(x^2+y^2)$. **1203.** $dz=x^y\left(\frac{y}{x}\,dx+\ln x\,dy\right)$. **1204.** $dy=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(dx+\frac{y\,dy}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. **1205.** $dz=e^x[(x\cos y-\operatorname{sen} y)\,dy+(\operatorname{sen} y+\cos y+x\operatorname{sen} y)\,dx]$. **1206.** $dz=e^{x+y}\{[(x+1)\cos y+y(\operatorname{sen} x+\cos x)]\,dx+[x(\cos y-\operatorname{sen} y)+(y+1)\operatorname{sen} x]\,dy\}$. **1027.** $dz=\frac{2dx}{x^2+4}+\frac{2\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y+4}$. **1208.** $du=e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$. **1209.** 1,08. **1210.** $-0{,}03$. **1211.** 1,013. **1212.** 3,037. **1213.** 1,05. **1218.** $6(x+y)$. **1219.** $-\operatorname{sen}(x+y)$. **1220.** $-4\cos(2x+2y)/\operatorname{sen}^2(2x+2y)$. **1221.** 0. **1222.** $x(x+2y)/(x+y)^2$. **1223.** $y(2-y^2)\cos xy-xy^2\operatorname{sen} xy$. **1224.** $\operatorname{sen} y\cos(x+\cos y)$. **1225.** $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}[(dy)^2-dx)^2]-\frac{4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **1226.** $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$. **1227.** $ae^y[e^y\operatorname{sen}(ax+e^y)-\cos(ax+e^y)]$. **1228.** 4. **1230.** $2[(dx)^2-dx\,dy+(dy)^2]$. **1232.** 3) $e^{xy}[y\,dx+x\,dy)^2+2\,dx\,dy]$ 4) $-\left(\frac{dx+dy}{x+y}\right)^2$; 5) $6\,dx\,dy\,dz$; 6) $-\frac{6dx^2}{x^4}(y\,dx-x\,dy)$; 7) $\frac{2}{y^4}(4y\,dx-3x\,dy)\,dy^3$; 8) $e^{x+y}(dx+dy)^5$. **1235.** $4/\operatorname{sen} 2x$. **1236.** $2x(3x+2)/(x^2+3x+1)^2$. **1237.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=x(2\cos x-x\operatorname{sen} x)$. **1238.** 0. **1239.** $\frac{\partial z}{\partial \xi}=4\xi$, $\frac{dz}{d\eta}=4\eta$. **1240.** $\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{2}{\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{2(\eta^4-1)}{\eta(\eta^4+1)}$. **1246.** $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{5}$. **1247.** $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{1}{6}$. **1248.** $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{9}$. **1249.** $|\mathbf{grad}\times u|_M=1/r_0^2$; $\cos\alpha=-x_0/r_0$, $\cos\beta=-y_0/r_0$, $\cos\gamma=-z_0/r_0$, donde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **1250.** $|\mathbf{grad}\,u|_M=3$, $\cos\alpha=1/3$, $\cos\beta=\cos\gamma=2/3$. **1251.** 1/3. **1256.** $-x/y$. **1257.** y/x. **1258.** $y'=-y/x$, $y''=2y/x^2$. **1259.** $(y\sqrt{2xy}-x^2)/(2y^2-x\sqrt{2xy})$. **1260.** y/x. **1261.** $(a^2-b^2)/(2b^2-a^2)$. **1262.** $y/(2x)$. **1263.** $(x+y)/(x-y)$. **1264.** $1/(2^y\ln 2)$. **1265.** $y'=-1$, $y''=0$. **1266.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$. **1267.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy}$. **1268.** $\frac{dx+(z/y)\,dy}{1+\ln(z/y)}$. **1269.** $-\frac{x\cos y+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$. **1270.** $-\frac{(y+z)\,dx+(x+z)\,dy}{x+y}$. **1271.** $-y-z-e^{y-x}$. **1272.** 1. **1275.** $2x+2y-z=1$, $(x-1)/2=(y-1)/2=(z-3)/(-1)$. **1276.** $2x+2y-3z+1=0$, $(x-2)/2=(y-2)/2=(z-3)/(-3)$. **1277.** $z-2x+2=0$, $(x-1)/2=y/0=z/(-1)$. **1278.** $x-y-2z+1=0$, $(x-\pi/4)/1=(y-\pi/4)/(-1)=(z-1/2)/(-2)$. **1279.** $x+4y+6z\pm 21=0$. **1281.** $(4/3;\ 4/3;\ 1/3)$ y $(-4/3;\ -4/3;\ -1/3)$. **1285.** $z_{\max}=1/64$. **1286.** $z_{\min}=-125$. **1287.** $z_{\max}=4$. **1288.** $z_{\min}=0$. **1289.** $z_{\max}=a\sqrt{3}/9$ cuando $x=y=2a/3$. **1293.** $z_{\min}=144/25$ en el punto (36/25;

48/25). **1294.** $z_{\min}=-16/3$, $z_{\max}=16$. **1295.** $z_{\min}=5$, $z_{\max}=11$. **1296.** $z_{\min}=-1/2$, $z_{\max}=1/2$. **1297.** $z_{\min}=1$, $z_{\max}=4$. **1298.** $z_{\min}=-2(\sqrt{2}+1)\cong -4.8$, $z_{\max}=2(\sqrt{2}-1)\cong=0.8$. **1299.** $z_{\min}=0$, $z_{\max}=3\sqrt{3}/2$. **1300.** $z_{\min}=-3$ cuando $x=y=3\pi/2$, $z_{\max}=1+\sqrt{3}/2$ cuando $x=y=5\pi/6$. **1301.** $z_{\min}=-1/8$, $z_{\max}=1$. **1302.** El equilátero. **1303.** El equilátero. **1304.** El cuadrado; $P_{\min}=4\sqrt{S}$. **1305.** El cubo; $V_{\max}=(S/6)\sqrt{S/6}$.

Capítulo IX

1315. $(2/5)x^2\sqrt{x}+C$. **1316.** $(5/4)\sqrt[5]{x^4}+C$. **1317.** $2\arcsen x-x+C$. **1318.** $\operatorname{arctg} x+x-x^3/3+C$. **1319.** $e^{3x}\cdot 3^x/(3+\ln 3)+C$. **1320.** $\operatorname{tg} x-x+C$. **1321.** $\operatorname{ch} x+\cos x+C$. **1322.** $x^2/2-2x+\ln|x|+C$. **1323.** $4\operatorname{tg} x-9\operatorname{ctg} x-x+C$. **1324.** $(1/2)\operatorname{sen}(x^2)+C$. **1325.** $\ln|\ln x|+C$. **1326.** $3(ax^2+b)^{4/3}/(8a)+C$. **1327.** $(2/3)\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}+C$. **1328.** $-(1/b)\cos(a+bx)+C$. **1329.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)+C$. **1346.** $e^{\sqrt{2x-1}}+C$. **1347.** $-(1/32)(1-2x^4)^4+C$. **1348.** $(1/3)\cos(2-3x)+C$. **1349.** $(1/10)\operatorname{sh}(5x^2+3)+C$. **1350.** $2\operatorname{arct}\sqrt{x}+C$. **1351.** $(1/5)(x^2+1)^{5/2}+C$. **1352.** $(1/2)\ln|x^2-1|+C$. **1353.** $(1/2)\ln|x^2+\sqrt{x^4-1}|+C$. **1354.** $(-1/4)\times\operatorname{arctg}\times(0{,}5\cos^2 2x)+C$. **1355.** $(1/\sqrt{7})\ln|(\sqrt{x}-\sqrt{7})/(\sqrt{x}+\sqrt{7})|+C$. **1356.** $2\arcsen(e^{x/2}/4)+C$. **1357.** $\ln|x+\sqrt{2+x^2}|+\arcsen(x/\sqrt{2})+C$. **1358.** $(-2/9)\sqrt{2-3x^3}+C$. **1359.** $-5\sqrt{3-x^2}+3\arcsen(x/\sqrt{3})+C$. **1360.** $(1/4)\operatorname{arctg}(x-3)/4+C$. **1361.** $2\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}\ln|(\sqrt{3x+5}-\sqrt{5})/(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}|+C$. **1362.** $1/(2\sqrt{10})\operatorname{arctg}(x^2\sqrt{2/5})+C$. **1368.** 2) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\lambda}+\frac{\lambda}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|+C$. **1370.** $(x^2/4)(2\ln x-1)+C$. **1371.** $x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}+C$. **1372.** $(x^2/3)\operatorname{arctg} x-(1/6)x^2+(1/6)\ln(x^2+1)+C$. **1373.** xe^x+C. **1374.** $-x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x+2\cos x+C$. **1375.** $(1/2)e^{x^2}\times(x^4-2x^2+2)+C$. **1376.** $(x+1)^2\operatorname{sen} x+2(x+1)\cos x+C$. **1377.** $(e^{2x}/5)\times(\operatorname{sen} x+2\cos x)+C$. **1378.** $(x/2)(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)+C$. **1379.** $-2\sqrt{x}\times\cos\sqrt{x}+2\operatorname{sen}\sqrt{x}+C$. **1387.** $-1/[3(x-1)^3]+C$. **1388.** $-1/[4(2x+3)^2]+C$. **1389.** $(1/3)\operatorname{arctg}(x-3)/3+C$. **1390.** $1/(3\sqrt{2})\operatorname{arctg}(x^3+1)/\sqrt{2}+C$. **1391.** $(1/2)\ln(x^2-4x+7)+C$. **1392.** $(5/2)\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}(x+5)/2+C$. **1393.** $(1/10)\ln(5x^2+2x+1)+(2/5)\operatorname{arctg}(5x+1)/2+C$. **1394.** $x/[8(x^2+2)^2]+3x/[32(x^2+1)]+(3\sqrt{2}/64)\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})+C$. **1395.** $(x-7)/[8(x^2+2x+5)]+(1/16)\operatorname{arctg}(x+1)/2+C$. **1405.** $-(2/3)\ln|x|+(5/3)\ln|x-3|+C$. **1406.** $-(1/2)\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+(1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}(2x+1)/\sqrt{3}+C$. **1407.** $1/[2(x-1)^2]+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$. **1408.** $(1/12)\ln|x-2|-(1/24)\ln(x^2+2x+4)-1/4)\sqrt{3})\operatorname{arctg}(x+1)/\sqrt{3}+C$. **1409.** $(31/108)\ln\times|x-3|+(29/108)\ln|x+3|+(2/9)\ln(x^2+9)-(1/54)\operatorname{arctg}(x/3)+C$. **1410.** $(1/4)\ln|x/(x-2)|-(x-1)/[2x(x-2)]+C$. **1411.** $(1/16)[\ln(x^2+1)/(x^2+9)]+(1/8)\operatorname{arctg} x-(1/24)\operatorname{arctg}(x/3)+C$. **1412.** $(1/4)\ln[(x^2+4)/(x^2+2x+5)]+(1/8)\operatorname{arctg}(x/2)+(7/32)\operatorname{arctg}(x+1)/2+C$. **1413.** $(1/2)[\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1)]+C$. **1414.** $x+(9/2)\ln|x-3|-(1/2)\ln|x-1|+C$. **1415.** $x^2/2+7x+(75/2)\ln|x-5|-(1/2)\ln|x-1|+C$. **1416.** $x+(1/2)\ln|(x-$

$-2)/(x+2)| - \operatorname{arctg}(x/2)+C$. **1417.** $3x+\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$. **1427.** $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$. **1428.** $(6/5)\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **1429.** $\ln|x-1/2+\sqrt{x^2-x-1}|+C$. **1430.** $\operatorname{arcsen}\times(x+1)/3+C$. **1431.** $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\operatorname{arcsen}(x-2)/3+C$. **1432.** $3\sqrt{x^2+x+2}+(1/2)\ln|x+1/2+\sqrt{x^2+x+2}|+C$. **1433.** $\sqrt{x/(x+2)}+C$. **1434.** $-\operatorname{arcsen}[(x+1)/(x\sqrt{3})]+C$. **1435.** $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{2}\ln\times\left|\frac{1-x\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$. **1436.** $-(x/2+5)\sqrt{-x^2+4x}+13\operatorname{arcsen}(x-2)/2+C$. **1440.** $3/\sqrt[3]{x+1}+\ln[x/(\sqrt[3]{x}+1)^3]+C$. **1441.** $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\,[(1/5)\times(\sqrt{x}+1)^2-(2/3)(\sqrt{x}+1)+1]+C$. **1442.** $(1/6)\ln[(t^2+t+1)/(t^2-2t+1)]-(1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}(2t+1)/\sqrt{3}+C$, donde $t=\sqrt[3]{1+x^3}/x$. **1443.** $(1/3)\ln\times[(\sqrt{1+x^3}-1)^2/|x^3|]+C$. **1444.** $(1/10)(5x^{4/3}+3)^{3/2}+C$. **1445.** $-(2-x^3)^{2/3}/(4x^2)+C$. **1463.** $(1/5)\ln|5\operatorname{tg}(x/2)+3|+C$. **1464.** $-2/[\operatorname{tg}(x/2)-1]+C$. **1465.** $-(1/17)x+(1/4)\ln|\operatorname{sen}x|-(1/68)\ln|\operatorname{sen}x+4\cos x|+C$. **1466.** $\ln|\operatorname{sen}x|-\operatorname{sen}x+C$. **1467.** $-(2/5)\ln(1-\cos x)+(1/5)\ln(\cos^2x+2\cos x+2)-(6/5)\operatorname{arctg}(1+\cos x)+C$. **1468.** $(1/3)\cos^3x-\cos x+C$. **1469.** $\ln|\operatorname{sen}x|-\operatorname{sen}^2x+(1/4)\operatorname{sen}^4x+C$. **1470.** $(1/8)x-(1/8)\operatorname{sen}x+C$. **1471.** $(3/8)x+(1/4)\operatorname{sen}2x+(1/32)\operatorname{sen}4x+C$. **1472.** $(2/3)\operatorname{tg}^3(x/2)-2\operatorname{tg}(x/2)+x+C$. **1473.** $-(1/6)\operatorname{ctg}^2 3x-(1/3)\ln|\operatorname{sen}3x|+C$. **1474.** $\operatorname{tg}x+(2/3)\operatorname{tg}^3x+(1/5)\operatorname{tg}^5x+C$. **1475.** $-(1/3)\operatorname{ctg}^3x+C$. **1476.** $(1/2)\operatorname{tg}x\sec x+(1/2)\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C$. **1477.** $-(1/2)\operatorname{ctg}x\operatorname{cosec}x-(1/2)\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+C$. **1478.** $(1/4)\operatorname{sen}2x-(1/8)\operatorname{sen}4x+C$. **1479.** $(3/5)\operatorname{sen}(5x/6)+3\operatorname{sen}(x/6)+C$. **1483.** $x/\sqrt{1-x^2}+C$. **1484.** $x/(a^2\sqrt{a^2+x^2})+C$. **1485.** $(1/2)(\arccos(1/x)+\sqrt{x^2-1}/x^2)+C$. **1486.** $-(1/6)\cos 3x+(1/20)\cos 5x+(1/4)\cos x+C$. **1487.** $-2(2x^2+6x+13)e^{-x/2}+C$. **1488.** $-(2\ln x+1)/(4x^2)+C$. **1489.** $x\operatorname{arctg}x-(3/2)(\operatorname{arctg}x)^2-(1/2)\ln(1+x^2)+C$. **1490.** $(x^2-1)\operatorname{sen}2x+x\cos 2x+C$. **1491.** $(1/4)x^2(2\ln^2x-2\ln x+1)+C$. **1492.** $x+\ln|e^x+3|+C$. **1493.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **1496.** $(2/\ln 2)\times(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1})+C$. **1495.** $(1/4)\ln|(t+1)/(t-1)|-(1/2)\operatorname{arctg}t+C$, donde $t^4=1+x^{-4}$. **1496.** $\sqrt{2}[(1/2)(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}(x-1)/2]+C$. **1497.** $\operatorname{sen}e^x-e^x\cos e^x+C$. **1498.** $(1/\sqrt{5})\ln|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2x+2/5}|+C$. **1499.** $(1/2)\cos^2x(1-2\ln\cos x)+C$. **1500.** $(1/2)\times\operatorname{sen}(x^2+4x+1)+C$. **1501.** $-0{,}5(x/\operatorname{sen}^2x+\operatorname{ctg}x)+C$. **1502.** $2(x-2)\times\sqrt{1+e^x}-2\ln[((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))]+C$. **1503.** $x\ln(x^2+x)+\ln|x+1|-x+C$. **1504.** $-1/x-\operatorname{arctg}x+C$. **1505.** $(x/2)(\cos\ln x+\operatorname{sen}\ln x)+C$. **1506.** $12\{\sqrt[12]{x}+\ln[(\sqrt[12]{x}-1)^2/\sqrt[12]{x}]\}+C$. **1507.** $[e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2)](\alpha\operatorname{sen}\beta x-\beta\cos\beta x)+C$. **1508.** $[e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2)](\beta\operatorname{sen}\beta x+\alpha\cos\beta x)+C$. **1509.** $[1/(ab)]\operatorname{arctg}[(b/a)\operatorname{tg}x]+C$. **1510.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **1511.** $0{,}5(\operatorname{arctg}x+x/(1+x^2))+C$.

Capítulo X

1521. $1/2$. **1522.** $e-1$. **1523.** $0<I\leqslant 4/27$. **1524.** $\pi/2\leqslant I\leqslant e\pi/2$. **1525.** $0<I<1$. **1526.** $464\sqrt{2}/15$. **1527.** $\pi/8$. **1528.** $e-\sqrt{e}$. **1529.** e^e-e.

1530. $(e^{\pi/2}-1)/2$. **1531.** $(\ln 3-1)/2$. **1532.** $\ln 1{,}5$. **1533.** 0. **1534.** 2/5. **1535.** $\pi/2$. **1536.** $\ln(4/3)$. **1537.** $(e^{\pi/2}-1)/2$. **1538.** 0. **1539.** $\pi/2-1$. **1546.** $\pi^2/8$. **1547.** $\pi/4$. **1548.** 256/15. **1549.** π. **1550.** $+\infty$. **1551.** 1/4. **1552.** $\pi/6$. **1559.** Diverge. **1560.** Converge. **1561.** Diverge. **1562.** Converge. **1563.** Diverge. **1564.** Converge. **1565.** Diverge. **1569.** 4,5 (unidades cuadradas). **1570.** 18 (unidades cuadradas). **1571.** 2/15 (unidades cuadradas). **1572.** $(41/2)\times$ $\times\operatorname{arcsen}(9/41)+20\ln 0{,}8$ (unidades cuadradas). **1573.** $\sqrt{2}-1$ (unidades cuadradas). **1574.** 8 (unidades cuadradas). **1575.** $(9\pi/4)-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\ln 2-$ $-(9/2)\operatorname{arcsen}(1/3)$ (unidades cuadradas). **1576.** 169π (unidades cuadradas). **1577.** $(3/8)\pi a^2$. **1578.** $8\sqrt{3}/3$ (unidades cuadradas). **1579.** $(3/2)\pi a^2$. **1580.** $(3\pi-8)/32$ (unidades cuadradas). **1581.** $\pi a^2/12$. **1582.** $\pi/3+\sqrt{3}/2$ (unidades cuadradas). **1586.** $(1/2)\ln 3$. **1587.** $(20/9)\sqrt{5/3}$. **1588.** $0{,}5[\sqrt{2}+$ $+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1589.** $(1/2)\ln 3$. **1590.** $\operatorname{sh}1\approx 1{,}17$. **1591.** 12. **1592.** $\sqrt{2}\times$ $\times(\pi-1)$. **1593.** 5π. **1594.** 72. **1595.** $[(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8]/3$. **1596.** πa. **1597.** $a(2\pi+3\sqrt{3})/8$. **1598.** 8. **1601.** $16\pi(5\pi+8)/5$ (unidades cúbicas). **1602.** $0{,}3\pi$ (unidades cúbicas). **1603.** $\pi(e^2+1)/4$ (unidades cúbicas). **1604.** $4\pi/35$ (unidades cúbicas). **1605.** 72 (unidades cúbicas). **1606.** $2a^2h/3$.

1607. $\pi r^2h/2$. **1609.** $\pi(e^2-e^{-2}+4)$ (unidades cuadradas). **1610.** $61\pi/1728$ (unidades cuadradas). **1611.** $2\pi b[b+(a^2/c^2)\operatorname{arcsen}(c/a)]$, donde $c^2=a^2-b^2$. **1612.** $64\pi/3$ (unidades cuadradas). **1617.** $M_x=a^2(e^2-e^{-2}+4)/8$; $I_x=a^3\times$ $\times(e-e^{-1})(e^2+e^{-2}+10)/24$. **1618.** $M_a=ah^2/6$; $I_a=ah^3/12$. **1619.** $I_x=$ $=1628/105$. **1620.** $I_x=ab^3/12$; $I_y=a^3b/12$. **1621.** $I_0=\pi d^4/32$. **1626.** $\bar{x}=0$. $\bar{y}=2r/\pi$ (para la circunferencia); $\bar{x}=0$, $\bar{y}=4r/(3\pi)$ (para el semicírculo). **1627.** $\bar{x}=(\pi-2)/2$, $\bar{y}=\pi/8$. **1628.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=8/5$. **1629.** $\bar{x}=\bar{y}=2a/5$. **1630.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=2/5$. **1631.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=\pi/8$. **1632.** $\pi r^3(3\pi-4)/3$. **1634.** 480π (unidades cúbicas). **1643.** $\pi\rho g r^2h^2/4$. **1644.** $\pi\rho g a d^3/8$. **1645.** $51\,450\pi$j. **1646** $547{,}8\pi$ J. **1647.** 50,7 J. **1648.** $\rho g a h^2/3$. **1649.** $17{,}64\pi$ kN; $70{,}56\pi$ kN; $158{,}76\pi$ kN; $282{,}24\pi$ kN; **1650.** $\rho g\pi d^3/8$. **1651.** 150 kg. **1652.** 1400 m. **1653.** $x=e^{10}$. **1654.** 36 m. **1663.** 1) $y'=\operatorname{sh}x/\sqrt{\operatorname{ch}^2x+1}$; 2) $y'=\operatorname{sh}^2(x/15)\operatorname{sh}^3(x/15)$; 3) $y'=1/\operatorname{ch}x$; 4) $y'=1/\operatorname{ch}^6x$; 5) $y'=1/\operatorname{ch}x$; 6) $y'=x/\operatorname{sh}(x^2/2)$. **1664** $M[\ln(1+\sqrt{2});\ \sqrt{2}]$. **1665.** $y_{\min}=0$ si $x=0$. **1666.** 1) $x^2\operatorname{sh}x-2x\operatorname{ch}x+$ $+2\operatorname{sh}x+C$; 2) $(1/32)\operatorname{sh}4x-(1/4)\operatorname{sh}2x+6x+C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}x-1}+$ $+C$; 4) $(1/2)(\operatorname{ch}x\operatorname{sen}x-\operatorname{sh}x\cos x)+C$; 5) $\operatorname{th}^2(x/2)+C$; 6) $(3/5)\operatorname{ch}^5$ $(x/3)-\operatorname{ch}^3(x/3)+C$. **1667.** 1) $\pi/6$; 2) $\ln 2-0{,}6$; 3) $2(2\ln 3-1)/3$. **1668.** $\operatorname{sh}(x-a)=\operatorname{sh}x\ \operatorname{ch}a-\operatorname{ch}x\ \operatorname{sh}a$; $\operatorname{ch}(x-a)=\operatorname{ch}x\ \operatorname{ch}a-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}a$. **1669.** $\operatorname{th}(x+a)=(\operatorname{th}x+\operatorname{th}a)/(1+\operatorname{th}x\operatorname{th}a)$; $\operatorname{th}(x-a)=(\operatorname{th}x-\operatorname{th}a)/$ $(1-\operatorname{th}x\operatorname{th}a)$; $\operatorname{th}2x=2\operatorname{th}x/(1+\operatorname{th}^2x)$. **1670.** $\operatorname{sh}(x/2)=\pm\sqrt{(\operatorname{ch}x-1)/2}$; $\operatorname{ch}(x/2)=\sqrt{(\operatorname{ch}x+1)/2}$; $\operatorname{th}(x/2)=\pm\sqrt{(\operatorname{ch})x-1)/(\operatorname{ch}x+1)}$. **1671.** $2\operatorname{sh}\times$ $\times(x\pm y)/2\cdot\operatorname{ch}(x\pm y)/2$; $2\operatorname{ch}(x+y)/2\cdot\operatorname{ch}(x-y)/2$; $2\operatorname{sh}(x+y)/2\times$ $\operatorname{sh}(x-y)/2$; $\operatorname{sh}(x\pm y)/(\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y)$. **1672.** $\operatorname{sh}x=2\operatorname{th}(x/2)/[1-\operatorname{th}^2(x/2)]$; $\operatorname{ch}x=[1+\operatorname{th}^2(x/2)]/[1-\operatorname{th}^2(x/2)]$. **1673.** $(1/2)\cdot[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y]$; $(1/2)\cdot[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)]$; $(1/2)\cdot[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)]$. **1674.** 8/5 (unidades cuadradas). **1675.** 1, 17a. **1676.** $a^2(t_2-t_1)/2$. **1677.** El arco de la elipse situado sobre el eje de las abscisas. **1678.** La semirrecta $x - y - 1 = 0$ situada en el cuadrante I. **1679.** $\cos \alpha = \pm 1/\text{ch}\, t$; $\text{tg}\, \alpha = \pm \text{sh}\, t$. **1680.** 1. **1681.** $x^2 - y^2$.

Capítulo XI

1692. Bajo la recta $x_1 - x_2 - 10 = 0$. **1693.** Triángulo. **1694.** Campo infinito. **1695.** Campo vacío. **1696.** Punto (2; 3). **1697.** El campo de solución es el trapecio, la desigualdad (e) puede ser eliminada. **1698.** Pirámide triangular. **1699.** Prisma de tres caras. **1704.** $L_{\max} = 10$, cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. **1705.** $L_{\min} = -4$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **1706.** $L_{\max} = 18$, cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. **1707.** $L_{\max} = 2$, cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **1708.** $L_{\max} = 48$ en cada punto del segmento AB, donde A (6; 0), B (7; 4). **1709.** $L_{\min} = -4$, cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1710.** $L_{\max} = 33$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 9$. **1711.** $L_{\max} = 20$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1718.** (0, 1, 3, 0); $L = -3$. **1719.** (3/2, 0, 0, 1/2, 11/2); $L = 3/2$. **1720.** (0, 3, 1, 0), $L = -1$. **1721.** (0, 50, 30, 215/6); $L = 340$. **1722.** (0, 5, 3/2, 0, 0, 3/2); $L = -5$. **1723.** $L = \infty$. **1724.** (0, 4/5, 1/5); $L = -11/5$. **1725.** (80, 120); $L_{\max} = 440$. **1726.** (20, 40); $L_{\max} = 220$. **1727.** 15 kg de forraje de especie I; 50 kg de forraje de especie II. **1729.** (5, 7, 9, 7/2, 0, 0); $L_{\max} = 38$. **1731.** $L_{\min} = 86/9$; (10/9; 28/9); $T_{\max} = 86/9$; (7/27, 8/27). **1732.** $L_{\max} = 216/7$; (24/7, 34/7); $T_{\min} = 216/7$; (8/7, 1/7). **1733.** $L_{\min} = 78/7$; (10/7, 16/7), $T_{\max} = 78/7$; (27/14, 3/14). **1735.** $L_{\min} = 510$ rublos; $x_{11} = 30$, $x_{12} = 60$, $x_{21} = 30$, $x_{23} = 60$. **1736.** $L_{\min} = 280$ rublos. Plan óptimo: $x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60$, $x_{23} = 20$, $x_{31} = 40$. **1737.** $L_{\min} = 395$ rublos. Plan óptimo: $x_{11} = 25$, $x_{13} = x_{32} = 20$, $x_{12} = x_{21} = 5$, $x_{23} = 35$. **1738.** $L_{\min} = 140$ rublos. Plan óptimo: $x_{14} = x_{22} = 10$, $x_{23} = x_{31} = x_{34} = 5$, $x_{33} = 15$.

Están en la venta

Artobolevski I.

Mecanismos en la técnica moderna

En 6 tomos

El manual del académico I. Artobolevski está dedicado a los mecanismos, en la constitución de los cuales entran sistemas eléctricos. Se describen mecanismos eléctricos y complejos, asi como de palancas y dentados. Los mecanismos se dan con las indicaciones correspondientes de sus estructuras y los movimientos reproducidos por ellos. Para algunos mecanismos se brinda información de su cinemática, con respecto a las proporciones métricas de sus partes, etc. Las representaciones esquemáticas de los mecanismos y sus descripciones, en la medida de lo posible, se ofrecen del mismo modo que en los tomos precendentes del manual.

Como base de la sistemática de los mecanismos descritos se introduce la clasificación estructural-constructiva con indicación paralela del destino funcional de los mecanismos. Para mayor comodidad en el manejo del texto se insertan dos tablas indicadoras, con ayuda de las cuales se pueden fácilmente hallar los mecanismos que respondan a las exigencias de estructura y funcionalidad. Además, se tiene indicador alfabético de los mecanismos, impreso de acuerdo con el principio de sus destinos funcionales.

El manual está destinado a ingenieros, constructores, cientificos investigadores, docentes y estudiantes de institutos de enseñanza superior.

Guerásimov Ya. y otros

Curso de química física

En dos tomos

El libro está escrito por un colegio de çientíficos encabezado por el miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, profesor Ya. Guerásimov. En el líbro se estudian los fundamentos de la termodinámica, la termodinámica de soluciones, el equilibrio químico (termodinámica química), los equilibrios de fase heterogéneos, los fenómenos superficiales, la absorción.
En el suplemento se dan constantes físicas universales, tablas de las principales propiedades termodinámicas de algunas combinaciones químicas en las condiçiones estandartizadas, coeficientes de ecuaciones de Tiómkin y Shwarzman, *funciones termodinámicas de* Planck-Einstéin y Debye.
En el segundo tomo se estudian detalladamente la cinética de las reacciones químicas, los fundamentos de la teoria cinético-molecular y su aplicación a las reacciones bimoleculares, la teoría del complejo activado (del estado de transiçión), la teoría de la catálisis y la electroquímica. Los autores exponen el material de manera accesible, poniendo de relieve la interrelación de los fenómenos. El material de la obra, expuesto con claridad y plenitud, tiene gran número de ejemplos de cálculo, así como tablas y gráficas que caracterizan el curso de los procesos y las propiedades físicas y químicas de las diferentes sustancias. Este libro se recomienda a los estudiantes y postgraduados de facultades de química, así como a profesores de química física. Está traducida a otros idiomas.

Kotliakov V.

En los glaciares del Pamir

Una de las corrientes más importantes de las ciencias modernas es la geología, la cual incluye el estudio: de la glaciación, de los valles y de los montes, de las oscilaciones de los glaciares en relación con las variaciones del clima, del equi librio de la masa, de los procesos del intercambio de calor y de la predicción de su régimen.

Desde «el Año geofísico internacional» (1957-59) realizan los científicos soviéticos un trabajo muy importante y complicado referente al estudio, catalogación y cartografía de los fenómenos glaciales y de nieve en las Tierras Antárticas y Articas: así mismo se hicieron expediciones a las regiones glaciales de los montes en el territorio de la Unión Soviética.

Una de estas expediciones se describe en el libro «En los glaciares del Pamir» de V. Kotliakov, conocido glaciólogo soviético, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS. El autor, participante de la expedición, expone a un elevado nivel científico, en una forma concisa y al mismo tiempo comprensible, los principales problemas de la glaciología moderna y su solución tomando como un ejemplo concreto el Pamir. Las cuestiones tratadas en el libro son muy urgentes ya que abarcan una de las tareas más importanres de la actualidad: abastecimiento de agua a las zonas premontañosas áridas. Este problema es muy importante para los habitantes de muchos países de Europa, Asia y América donde los glaciares en los montes, por un lado, representan grandes reservas potenciáles de agua y, por otro lado, pueden causar las crecidas peligrosas de agua y de hielo. Además el libro les brinda a los lectores de otros países la posibilidad de conocer la organización y los métodos de trabajo empleados en una expedición científica alpina así como la historia del descubrimiento del Pamir, su naturaleza y a los pueblos que habitan esta región.

Makienko N.

Manual del ajustador

Este libro, escrito por el ingeniero soviético Nikolai Makienko, da las nociones necesarias para: organizar el puesto de trabajo del ajustador; habla sobre la tecnología de las operaciones generales (corte de metal, taladrado, trazado, concelado, afilado, enderezado, etc.), la herramienta, los dispositivos y los utencillos empleados en estas labores.
La obra examina también los procesos tecnológicos de la fabricación de herramientas y los problemas que conlleva la mecanización de los trabajos del ajustador. El libro trata con bastante detalle los fundamentos de la metalografía, es deçir, se dan las nociones necesarias sobre los metales y aleaciones, sus propiedades, los medios usados para su obtención, la tecnologia de tratamiento y el campo de su aplicación.
Es libro de texto para escuelas técnicas profesionales, así como también para la preparación de obreros.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Diríjan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.